KOMPLEKS ANALYSE

NOTER TIL MATEMATIK BETA

H.A. NIELSEN

INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG
AARHUS UNIVERSITET
2003

KOMPLEKS ANALYSE

H.A. NIELSEN

Indhold

1.	Komplekse tal	2
2.	Elementære funktioner	11
3.	Holomorfe funktioner	21
4.	Kompleks kurveintegral	27
5.	Cauchys integralsætninger	37
6.	Potensrækker	45
7.	Poler	52
8.	Residuesætningen	59
9.	Integraler, summer og produkter	63
Eksamensopgaver		85
Løsninger		94
Litteratur		110
Stikord		111

Noterne er til et 18 timers kursus inden for Matematik beta i kompleks analyse. De skitserede beviser er ultrakorte og skal kun give appetit på at se i de mere udførlige fremstillinger i litteraturlisten. Der er især lagt vægt på beregning af bestemte integraler ved brug af residuesætningen. Foruden det direkte nyttige og sjove heri er tanken, at dette skulle katalysere fortrolighed med regning med komplekse tal og funktioner.
I resten af Matematik beta såvel Fourierrækketeorien som gruppere-præsentationsteorien vil komplekse tal spille en vigtig rolle.
Reel analyse forudsættes i et omfang svarende til Matematik alfa 1+2, hvorfra også afsnit 1+2 i disse noter principielt er kendte.
Fremstillingen er bevidst kortfattet og præcis, fremfor beskrivende og detaljeret. Dette kræver en lidt større indsats ved første læsning, men vil betale sig i overskuelighed senere. For et helstøbt udbytte forudsættes, at noterne suppleres med både forelæsninger og mange øvelser.
Tidligere eksamensopgaver i Matematik beta med løsninger, udgivet særskilt, er vejledende for vægtning af både pensum og sværhed.

Version: 2.3. 10. november, 2005.

1. Komplekse tal

Her repeteres kort de komplekse tal, regneregler, modulus og argument samt trigonometriske formler og roduddragning.

Definition 1.1. Ved et *kompleks tal* forstås et udtryk

$$z = x + yi$$

hvor $x = \operatorname{Re} z$ og $y = \operatorname{Im} z$ er reelle tal kaldet *realdel* og *imaginærdel*. i er den *imaginære enhed*, formelt identificeret med $i = \sqrt{-1}$, altså $i^2 = -1$. Mængden af komplekse tal betegnes $\mathbb{C}$.
Det er et faktum, at de sædvanlige regneregler for reelle tal udvider meningsfuldt fra realdel til alle komplekse tal. Der gælder

$$z_1 = x_1 + y_1 i,\ z_2 = x_2 + y_2 i$$

addition

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \end{aligned}$$

multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) \\ &= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 i x_2 + y_1 i y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i \end{aligned}$$

Øvelse 1.2.

$$(3 - 5i) + (-2 + 3i) = 1 - 2i$$

$$\begin{aligned} (3 - 5i)(-2 + 3i) &= 3(-2) - (-5)3 + (3 \cdot 3 + (-5)(-2))i \\ &= 9 + 19i \end{aligned}$$

Definition 1.3. For et kompleks tal $z = x + yi$ er det *konjugerede tal* $\bar{z}$ givet ved

$$\bar{z} = x - yi$$

så

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2},\ \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Der gælder

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

samt

$$z\bar{z} = x^2 + y^2$$

Sætning 1.4. *Hvis $z = x + yi \neq 0$ så findes det reciproke tal*

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$$

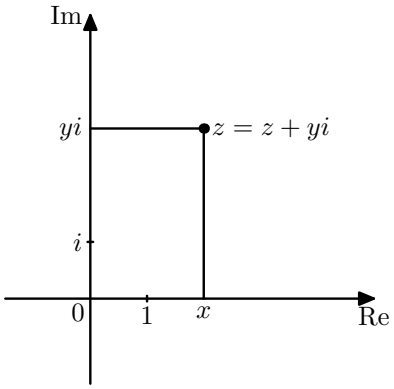
$$\frac{1}{x+yi} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

Øvelse 1.5.

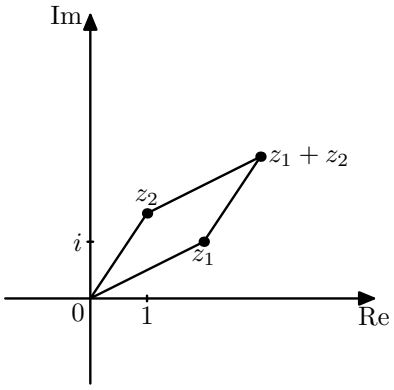
$$\frac{3+5i}{1-i} = \frac{(3+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2+8i}{2} = -1+4i$$

Definition 1.6. Talplanen $\mathbb{R}^2$ med *rektangulære* koordinater (x, y) identificeres med de komplekse tal (*den komplekse plan*) $\mathbb{C}$ ved $1 = (1, 0)$ og $i = (0, 1)$, så

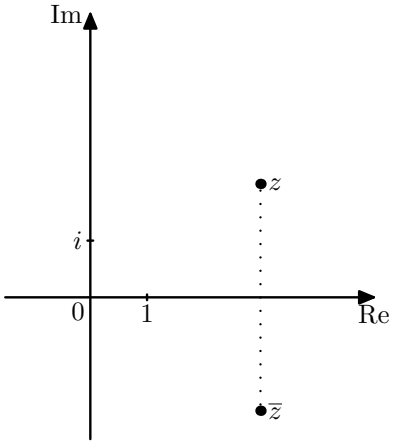
$$x + yi = (x, y)$$



Skitse 1.6.1. Den komplekse plan.



Skitse 1.6.2. Addition ved parallellogramreglen.



Skitse 1.6.3. Konjugering er spejling i den reelle akse.

Den ordnede reelle basis $\{1, i\}$ bestemmer den positive *omløbsretning*. Normen

$$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} = |(x, y)|$$

kaldet *Modulus* (*absolut værdi*) udtrykkes ved

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

Modulus opfylder nulregel

$$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$$

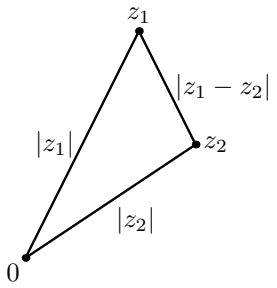
multiplikativitet

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

og *trekantsuligheder*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$



Skitse 1.6.4. Trekantsuligheder er geometrisk indlysende.

Sætning 1.7. *For* $|z| = 1$ *er*

$$z^{-1} = \overline{z}$$

For $z \neq 0$ *er*

$$\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{|z|^2}$$

Eksempel 1.8. For reelle tal a, b, c, d er

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

ved brug af modulus multiplikativitet på $a + bi, c + di$.
Dette giver, at hvis to tal er sum af kvadrattal, så gælder dette også for produktet. For eksempel

$$65 = 13 \cdot 5 = (2^2 + 3^2)(1^2 + 2^2) = (-4)^2 + 7^2 = 16 + 49$$

Øvelse 1.9. Hvis $|z| > 10$ så er

$$|z - 3i| > 7$$

ved brug af trekantsuligheden.

Definition 1.10. Et kompleks tal kan udtrykkes ved *polære* koordinater

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

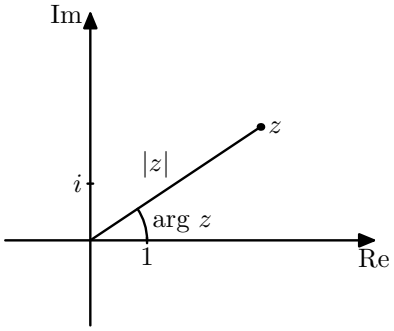
Vinklen $\theta = \arg z$, $z \neq 0$, er bestemt op til et heltals fold af 2π og kaldes *argument*. Det er bestemt ved

$$\cos\arg z = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \ \sin\arg z = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$$

Hvis $\operatorname{Re} z \neq 0$ så er

$$\tan\arg z = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$$

som det ses af figuren:



Skitse 1.10.1. Polære koordinater.

Ved *hovedbestemmelsen* af arg forstås værdien

$$\operatorname{Arg} z \in]-\pi, \pi]$$

For $\operatorname{Arg} z \neq \pi$ er

$$\operatorname{Arg} z = 2 \operatorname{Arctan} \frac{\operatorname{Im} z}{|z| + \operatorname{Re} z}$$

Thi

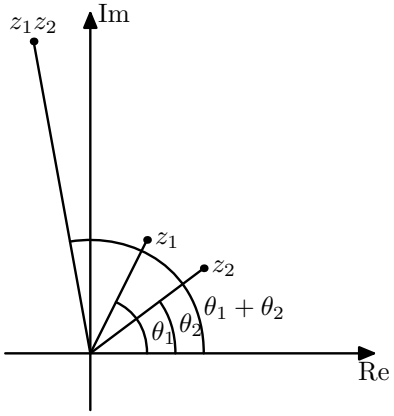
$$\tan \frac{\operatorname{Arg} z}{2} = \frac{2 \sin \frac{\operatorname{Arg} z}{2} \cos \frac{\operatorname{Arg} z}{2}}{2 \cos^2 \frac{\operatorname{Arg} z}{2}} = \frac{\sin \operatorname{Arg} z}{1 + \cos \operatorname{Arg} z} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z| + \operatorname{Re} z}$$

Multiplikation i $\mathbb{C}$ kan udtrykkes ved additionsformlerne

$$(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

så for komplekse tal z_1, z_2 er

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$
$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

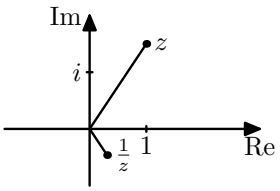


Skitse 1.10.2. Multiplikation af komplekse tal.

For $z \neq 0$ er

$$\arg \frac{1}{z} = -\arg z$$

pånær fold af 2π.



Skitse 1.10.3. Reciprok tal.

Øvelse 1.11. Bestem modulus og argument for

$$\frac{i}{1-i}$$

Da $|i| = 1,\ \arg i = \frac{\pi}{2}$ og $|1-i| = \sqrt{2},\ \arg 1-i = -\frac{\pi}{4}$ er

$$\left|\frac{i}{1-i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arg\frac{i}{1-i} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4}$$

Det ses

$$\frac{i}{1-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Øvelse 1.12. Skitser følgende mængder af $z \in \mathbb{C}$

(1) $\operatorname{Re} z = a$
(2) $|z| = r$
(3) $a \le \operatorname{Re} z \le b,\ c \le \operatorname{Im} z \le d$
(4) $s \le |z| \le t,\ u \le \arg z \le v$

Eksempel 1.13. Trigonometriske formler for fold af vinkler udledes fra binomialformlen

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k$$

Realdel og imaginærdel samles

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \dots$$

$$\sin n\theta = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta - \dots$$

Eksempel 1.14. Trigonometriske sumformler til brug i Fourierrækketeorien udledes fra sum af kvotientrække, $z \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

(Antag først $\omega = 0$)

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta+\omega) = \frac{\cos(\frac{n}{2}\theta+\omega)\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta+\omega) = \frac{\sin(\frac{n}{2}\theta+\omega)\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}$$

Sætning 1.15 (Rødder, de Moivre)**.** *Lad* $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

(1) *For et helt tal* n *er*

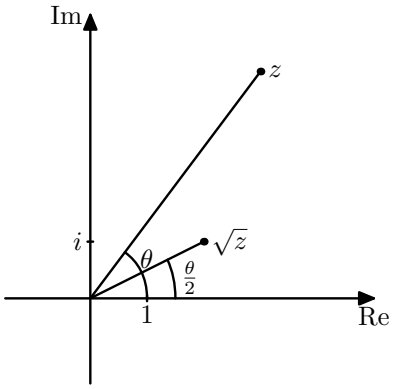
$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

(2) *For helt tal* $n > 0$ *og* $0 \le k \le n-1$ *er*

$$w_k = |z|^{1/n}(\cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k) + i\sin(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k))$$

de n *forskellige komplekse rødder til ligningen*

$$w^n = z,\ z \neq 0$$



Skitse 1.15.1. Kvadratroden.

Øvelse 1.16. Bestem de komplekse tal w som opfylder

$$w^4 = -4$$

Da $|-4| = 4$ og $\arg -4 = \pi$ så er

$$w_k = 4^{1/4}(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k))$$

altså

$$w_0 = 1+i, w_1 = -1+i, w_2 = -1-i, w_3 = 1-i$$

Eksempel 1.17 (Kvadratrod)**.** Kvadratroden $\pm w = \pm(u+vi)$ af $z = x+yi$ kan beregnes direkte.

$$(u+vi)^2 = x+yi$$

giver

$$u^2 - v^2 = x,\ 2uv = y$$

som kvadreres og adderes

$$(u^2+v^2)^2 = x^2+y^2$$

og dermed

$$2u^2 = \sqrt{x^2+y^2} + x,\ 2v^2 = \sqrt{x^2+y^2} - x$$

Så pånær fortegn, + for $y = \operatorname{Im} z$ positiv, er

$$u + vi = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\, i$$

eller

$$w = \sqrt{\frac{|z| + \operatorname{Re} z}{2}} \pm \sqrt{\frac{|z| - \operatorname{Re} z}{2}}\, i$$

Øvelse 1.18 (Andengradsligning)**.** Formlen for løsning af andengradsligningen

$$w^2 + aw + b = 0$$

er som bekendt

$$w = \frac{-a \pm \sqrt{d}}{2}, \quad d = a^2 - 4b$$

Løs ligningen

$$w^2 + (-4+i)w + 5 + i = 0$$

Diskriminanten er $(-4+i)^2 - 4(5+i) = -5 - 12i$ og kvadratroden er

$$\sqrt{-5-12i} = \sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}\, i = 2 - 3i$$

Formlen for løsninger giver

$$w = \frac{4 - i \pm \sqrt{-5-12i}}{2}$$

altså

$$w_0 = 1 + i, w_1 = 3 - 2i$$

Opgaver

Opgave 1.1. Udregn (form $x + yi$)

$$\frac{1-i}{1+i} \text{ og } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{-1}$$

Opgave 1.2. Udregn realdel og imaginærdel af

$$\frac{z-i}{z+i}$$

udtrykt ved realdel og imaginærdel af z.

Opgave 1.3. Find modulus og argument af

$$(1+i)^7,\ i^7,\ \left(\frac{1+i}{i}\right)^7$$

Opgave 1.4. Hvis $|c| = 1$ og $d \neq c$, så er

$$\left| \frac{c-d}{1-\overline{c}d} \right| = 1$$

Opgave 1.5. Bestem for givne c, d den mindste værdi af

$$|z-c| + |z-d|, \ z \in \mathbb{C}$$

Opgave 1.6. Skitser følgende mængder af $z \in \mathbb{C}$

(1) $\operatorname{Re} z^2 \leq 1$
(2) $\operatorname{Im} z^2 \leq 1$

Opgave 1.7. Angiv formler for

$$\cos 5\theta, \ \sin 5\theta, \ \tan 5\theta$$

udtrykt ved $\cos\theta, \ \sin\theta, \ \tan\theta$

Opgave 1.8. Løs ligningerne

$$z^3 = 1, \ z^4 = 1, \ z^6 = 1$$

Opgave 1.9. Find kvadratrødder

$$\sqrt{-36}, \ \sqrt{-i}, \sqrt{5-6i}, \sqrt{\cos 1 + i \sin 2}$$

Opgave 1.10. Løs andengradsligningerne

$$z^2 + z + 1 = 0, \ z^2 + (1+2i)z + 1 - 5i = 0$$

Opgave 1.11. Løs ligningen

$$iz = \overline{z}$$

i både rektangulære og polære koordinater.

2. Elementære funktioner

Polynomier og rationale funktioner udvider naturligt til komplekse tal. Udvidelsen af exponential- og logaritmefunktionen til komplekse tal forbindes ved Eulers formler med trigonometriske funktioner.

Eksempel 2.1. For komplekse tal $e = a + bi, f = c + di$ er den lineære funktion

$$z \mapsto ez + f$$

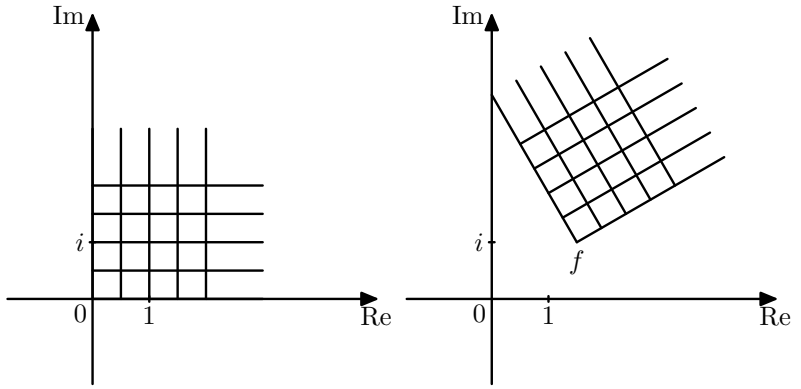
for $z = x + yi$ givet ved matrixformen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Fra polær form $a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

ses, at en lineær funktion bevarer vinkler i den komplekse plan.



Skitse 2.1.1. z-plan og w-billedplan.

Øvelse 2.2. Ved navngivningen

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

identificeres de komplekse tal med addition og multiplikation med reelle matricer af form

$$x + yi = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

med matrixaddition og matrixmultiplikation.

Eksempel 2.3. Til en kompleks 2×2 matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

med determinant $ad - bc \neq 0$ tilordnes en rational funktion $z \mapsto w$ af form

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \ ad - bc \neq 0$$

som kaldes en *Möbius transformation.* Den er defineret for z, hvor $cz+d \neq 0$ og har billede w, hvor $-cw + a \neq 0$. Der er en invers funktion

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

som også er en Möbius transformation. Dette følger af, at sammensat funktion

$$w_1 = \frac{a_1 w + b_1}{c_1 w + d_1}$$

$$w_1 = \frac{(a_1 a + b_1 c)z + (a_1 b + b_1 d)}{(c_1 a + d_1 c)z + (c_1 b + d_1 d)}$$

igen er en Möbius transformation, og på matrix form er koefficienterne i sammensætning givet ved matrixmultiplikation.

Øvelse 2.4. Möbius transformationen

$$w = \frac{1}{z}$$

er en bijektiv afbildning af $\mathbb{C}$ fraregnet 0 på sig selv. For reelle $a > 0$ afbildes cirklen med centrum i a og radius a

$$|z - a| = a$$

på den lodrette linje gennem $\frac{1}{2a}$

$$\operatorname{Re} w = \frac{1}{2a}$$

og omvendt da transformationen er sin egen inverse.

Øvelse 2.5. For $|a| < 1$ er Möbius transformationen

$$w = \frac{z - a}{\overline{a}z - 1}$$

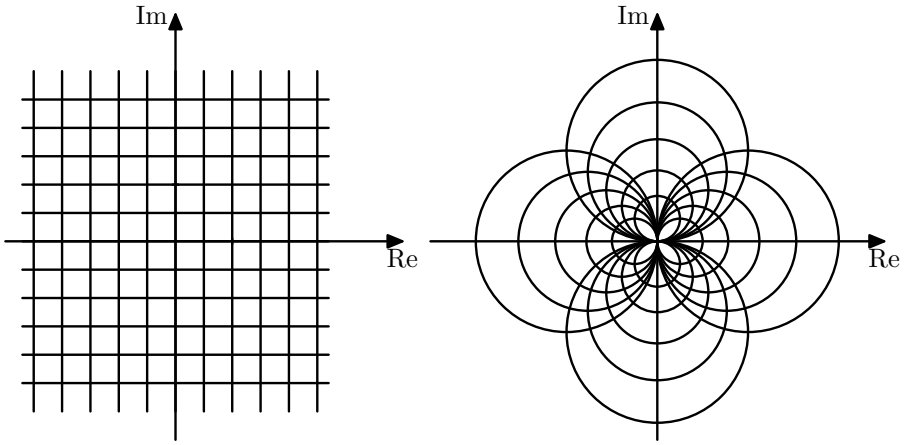
en bijektiv afbildning af cirkelskiven $|z| \leq 1$ på sig selv.

Øvelse 2.6. Möbius transformationerne

$$w = \frac{z - i}{z + i}, \ z = \frac{iw + i}{-w + 1}$$

giver en bijektiv afbildning

$$\{z | \operatorname{Im} z > 0\} \simeq \{w | \, |w| < 1\}$$



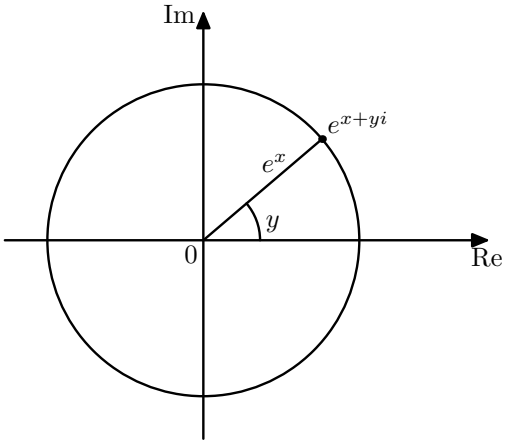
Skitse 2.4.1. z-plan og w-billedplan for reciprokfunktion

af den øvre halvplan på den åbne enhedscirkelskive.

Definition 2.7. *Exponentialfunktionen* er givet ved, $z = x + yi$

$$\exp z = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

som er en udvidelse af exponentialfunktionen for realdel.



Skitse 2.7.1. Eksponentialfunktionen.

Der gælder den fundamentale regneregel

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

Logaritmefunktionen er bestemt op til heltals fold af $2\pi i$ for $z \neq 0$

$$\log z = \log |z| + i \arg z$$

Ved *hovedbestemmelsen* af log forstås værdien

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z$$

For komplekse tal z_1, z_2 er

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$$

pånær fold af 2π. Der gælder

$$\exp \circ \log z = z$$

$$\log \circ \exp z = z + 2p\pi i, \ p \text{ helt tal}$$

For et tal $w \neq 0$ findes tal z så

$$e^z = w$$

alle andre løsninger er på formen

$$z + 2p\pi i, \ p \text{ et helt tal}$$

Exponentialfunktionen er

$$\exp : \{z| -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\} \to \{z|z \neq 0\}$$

en bijektiv afbildning, hvis inverse afbildning er logaritmefunktionens hovedbestemmelse Log.

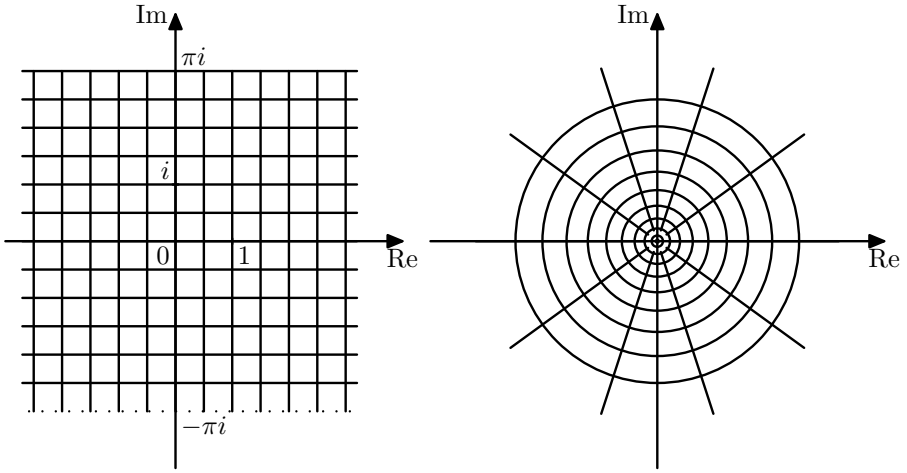
Øvelse 2.8. Vis opskrivningerne

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \ \arg e^z = \operatorname{Im} z$$

$$\operatorname{Re} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \cos \operatorname{Im} z, \ \operatorname{Im} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \sin \operatorname{Im} z$$

$$\operatorname{Re} \log z = \log |z|, \ \operatorname{Im} \log z = \arg z$$

Øvelse 2.9. Vandrette linjer $\{x+yi|\ x \in \mathbb{R}\}$ afbildes ved $z \mapsto e^z$ i halvlinjer fra 0 med retningsvinkel y.
Lodrette linjer $\{x + yi|\ y \in \mathbb{R}\}$ afbildes ved $z \mapsto e^z$ i cirkler med centrum i 0 og radius e^x.



Skitse 2.9.1. z-plan og w-billedplan for eksponentialfunktionen

Eksempel 2.10 (Potenser)**.** Potenser (der er flere) z^w kan nu defineres meningsfuldt for alle z, w.

(1) $0^0 = 1$, $0^w = 0$ for $w \neq 0$.
(2) $0 \neq z = e^v$, $z^w = e^{vw}$.

Potensregneregler

$$(z_1 z_2)^w = z_1^w z_2^w \quad \text{pånær } e^{2p\pi i w}$$
$$z^{w_1+w_2} = z^{w_1} z^{w_2} \quad \text{pånær } e^{2p\pi i(w_1+w_2)}$$

Øvelse 2.11 (Euler)**.** Beregn tallet i^i.

$$i = e^{\frac{\pi i}{2}}$$

giver

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0.21$$

Eksempel 2.12 (Eulers formler)**.** De *(hyperbolsk)trigonometriske funktioner* defineres for alle komplekse tal z ved

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \cos iz$$
$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = -i \sin iz$$

De opfylder de kendte additionsformler

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$
$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$
$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

Eksempel 2.13. Lad

$$w = \cos z$$

Så er

$$z = \arccos w = \frac{1}{i} \log(w \pm \sqrt{w^2 - 1})$$

Tilsvarende for

$$w = \sin z$$

er

$$z = \arcsin w = \frac{1}{i} \log(wi \pm \sqrt{1 - w^2})$$

Det følger, at funktionerne cos og sin er surjektive.

Eksempel 2.14.

$$\sin z = 0 \text{ har løsninger } z = p\pi,\ p \text{ helt tal}$$
$$\cos z = 0 \text{ har løsninger } z = \frac{\pi}{2} + p\pi,\ p \text{ helt tal}$$

Eksempel 2.15. Lad

$$w = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Så er

$$z = \arctan w = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iw}{1-iw}$$

Eksempel 2.16 (Enhedsrødder)**.** Løsningerne til ligningen

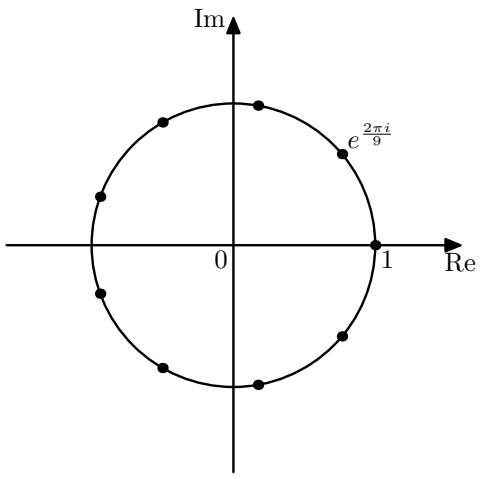
$$w^n = 1$$

kaldes *n-te enhedsrødder* og har form

$$w_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}},\ k = 0, \ldots, n-1$$
$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

kaldes en *primitiv* enhedsrod og der gælder

$$w_k = \zeta^k$$



Skitse 2.16.1. Enhedsrødder.

Af faktoriseringen

$$(w - w_0) \ldots (w - w_{n-1}) = w^n - 1$$

fås den nyttige formel

$$w_0 + \cdots + w_{n-1} = 1 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0$$

Ligningen

$$w^n = z,\ z \neq 0$$

har for en valgt rod w_0 rødder

$$w_k = \zeta^k w_0,\ k = 0, \ldots, n-1$$

De første primitive enhedsrødder er

$$\begin{aligned}
e^{2\pi i} &= 1 \\
e^{\frac{2\pi i}{2}} &= -1 \\
e^{\frac{2\pi i}{3}} &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
e^{\frac{2\pi i}{4}} &= i \\
e^{\frac{2\pi i}{5}} &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}\ i \\
e^{\frac{2\pi i}{6}} &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
e^{\frac{2\pi i}{7}} &= e^{\frac{2\pi i}{7}} \\
e^{\frac{2\pi i}{8}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \\
e^{\frac{2\pi i}{9}} &= e^{\frac{2\pi i}{9}} \\
e^{\frac{2\pi i}{10}} &= \frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}\ i \\
e^{\frac{2\pi i}{11}} &= e^{\frac{2\pi i}{11}} \\
e^{\frac{2\pi i}{12}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i
\end{aligned}$$

Beregning af $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$. Sæt

$$x = \zeta + \zeta^4,\ y = \zeta^2 + \zeta^3$$

Fra relationen

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$$

er

$$x + y = -1,\ xy = -1$$

så x, y er rødder i ligningen

$$u^2 + u - 1$$

Det fås

$$\zeta + \frac{1}{\zeta} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

og dermed er ζ rod i ligningen

$$\zeta^2 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\zeta + 1 = 0$$

Eksempel 2.17 (Tredjegradsligning)**.** Ligningen

$$w^3 + aw^2 + bw + c = 0$$

reduceres ved substitution

$$\begin{aligned} w &= z - \frac{a}{3} \\ p &= -\frac{a^2}{3} + b \\ q &= \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \end{aligned}$$

til

$$z^3 + pz + q = 0$$

Rødderne heri z_0, z_1, z_2 opfylder

$$(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) = z^3 + pz + q$$

og dermed relationerne

$$z_0 + z_1 + z_2 = 0,\ z_0z_1 + z_0z_2 + z_1z_2 = p,\ z_0z_1z_2 = -q$$

Lad $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ 1 + \zeta + \zeta^2 = 0$ være en primitiv 3-je enhedsrod. Sæt

$$\begin{aligned} x &= z_0 + \zeta z_1 + \zeta^2 z_2 \\ y &= z_0 + \zeta^2 z_1 + \zeta z_2 \end{aligned}$$

så er

$$3z_0 = x + y,\ 3z_1 = \zeta^2 x + \zeta y,\ 3z_3 = \zeta x + \zeta^2 y$$

Det fås

$$\begin{aligned} xy &= -3p \\ x^3y^3 &= -27p^3 \\ x^3 + y^3 &= -27q \end{aligned}$$

så x^3, y^3 er rødder i ligningen

$$u^2 + 27qu - 27p^3 = 0$$

$$\frac{x^3}{27} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},\ \frac{y^3}{27} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Kubikrødder skal da vælges, så

$$xy = -3p$$

Dette giver tre muligheder og de imponerende formler

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ z_1 &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ z_2 &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \end{aligned}$$

Øvelse 2.18. Løs ligningen (Fibonacci)

$$w^3 + 2w^2 + 10w - 20 = 0$$

Denne reduceres ved substitution

$$\begin{aligned} w &= z - \frac{2}{3} \\ p &= \frac{26}{3} \\ q &= -\frac{704}{27} \end{aligned}$$

til

$$z^3 + \frac{26}{3}z - \frac{704}{27} = 0$$

Så er

$$\frac{x^3}{27} = \frac{352}{27} + \sqrt{\left(\frac{352}{27}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^3}, \quad \frac{y^3}{27} = \frac{352}{27} - \sqrt{\left(\frac{352}{27}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^3}$$

Kubikrødder skal da vælges, så

$$xy = -26$$

Dette giver $x, y \in \mathbb{R}$ og

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{\frac{352}{27} + \sqrt{\left(\frac{352}{27}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{352}{27} - \sqrt{\left(\frac{352}{27}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^3}} - \frac{2}{3} \\ w_1 &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{352}{27} + \sqrt{\left(\frac{352}{27}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^3}} \\ &\quad + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{352}{27} - \sqrt{\left(\frac{352}{27}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^3}} - \frac{2}{3} \\ w_2 &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{352}{27} + \sqrt{\left(\frac{352}{27}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^3}} \\ &\quad + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{352}{27} - \sqrt{\left(\frac{352}{27}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^3}} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Approximation

$$\begin{aligned} w_0 &\approx 1.37 \\ w_1 &\approx -1.68 - 3.43i \\ w_2 &\approx -1.68 + 3.43i \end{aligned}$$

Opgaver

Opgave 2.1. Gennemfør udregningen

$$|\cos(x+yi)|^2 = \cos^2(x) + \sinh^2(y)$$
$$|\sin(x+yi)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$$

Opgave 2.2. Angiv formler for

$$|\log z|, \ \arg \log z$$
$$|e^{zi}|, \ \arg e^{zi}$$

Opgave 2.3. Vandrette linjer $\{x+yi|\ x \in \mathbb{R}\}$ afbildes ved $z \mapsto \sin z$ i ellipser. Lodrette linjer $\{x+yi|\ y \in \mathbb{R}\}$ afbildes ved $z \mapsto \sin z$ i hyperbler.

Opgave 2.4. Løs ligningerne

$$\cos z = \frac{4}{3}i$$
$$\tan z = 2i$$

Opgave 2.5. Bestem alle værdier af

$$i^i$$

Opgave 2.6. En Möbius transformation fører cirkler og linjer i den komplekse plan i cirkler og linjer, men bevarer ikke altid type eller centrum. (Benyt f.eks. omskrivningen

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c}\frac{1}{cz+d}$$

for $c \neq 0$.)

Opgave 2.7. Benyt værdien af $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ til vise

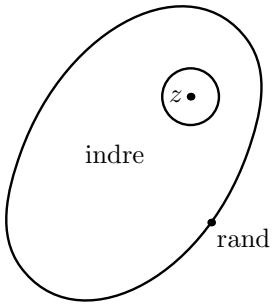
$$e^{\frac{2\pi i}{10}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}\ i$$

Opgave 2.8. Løs ligningen (Cardano)

$$w^3 - 8w + 3 = 0$$

3. Holomorfe funktioner

Da $\mathbb{C}$ med modulus er identificeret $\mathbb{R}^2$ med norm kan begreberne *åbne* og *lukkede* delmængder samt *rand* i $\mathbb{C}$ tillægges den sædvanlige betydning. En lukket og begrænset mængde er *kompakt*. Ordet *område* reserveres til en ikke-tom åben sammenhængende delmængde.



Skitse 3.0.1. Et punkt z i det indre.

Lad $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, en afbildning $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ kaldes en *kompleks funktion*. Der indføres skrivemåden

$$f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$$

$$u = \operatorname{Re} f,\ v = \operatorname{Im} f$$

med realdel og imaginærdel. Begreber som grænseværdi, kontinuitet og (**reel**) partiel differentiabilitet er da i sædvanlig betydning for u, v og de kendte regneregler kan udnyttes. Der er imidlertid en vigtigere form for "differentiabilitet", nemlig i det tilfælde, hvor den lineære tilnærmelse er på formen $h \mapsto ah + b$. Sammemhæng mellem disse begreber er hovedtema i dette afsnit. Beviser for regnereglerne er ord for ord som i det reelle tilfælde.

Definition 3.1. En funktion f defineret i en åben mængde $\mathcal{D}$ kaldes *holomorf* i $\mathcal{D}$, hvis for alle $z \in \mathcal{D}$, differenskvotienten har en grænseværdi, differentialkvotienten,

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \to f'(z) = \frac{df}{dz}(z),\ h \to 0$$

I så fald fås tilnærmelsen

$$f(z + h) - f(z) \approx f'(z)h$$

$f' = \frac{df}{dz}$ er den afledede funktion og f er stamfunktion til f'.
Da kompleks multiplikation bevarer vinkler følger, at holomorfe funktioner bevarer vinkler i den komplekse plan, Eksempel 2.1.
I beviserne forudsættes tilstrækkelig differentiabilitet.

Sætning 3.2 (Regneregler)**.** *Hvis f, g er holomorfe i $\mathcal{D}$, så er*

$$f+g,\ fg,\ \frac{f}{g} \text{ for } g(z) \neq 0$$

holomorfe i $\mathcal{D}$ og

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g(z)'$$
$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$$

Sætning 3.3 (Kæderegel, Invers funktion)**.** *Hvis f er holomorf i $\mathcal{D}$ og g er holomorf i $\mathcal{E}$, $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{E}$, så er*

$$g \circ f$$

holomorf med, $w = f(z)$,

$$(g \circ f)'(z) = g'(w)f'(z)$$

Hvis f^{-1} er invers funktion til f, $f(z) = w$, så er denne holomorf og

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

Eksempel 3.4. Lad $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ give Möbius transformationen

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Den afledede er

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$$

Den inverse funktion

$$z = h(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

har den afledede

$$h'(w) = \frac{ad-bc}{(-cw+a)^2} = \frac{(cz+d)^2}{ad-bc}$$

Eksempel 3.5. De elementære funktioner er holomorfe. Den afledede beregnes ved de kendte formler

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$
$$(e^z)' = e^z$$
$$(\cos z)' = -\sin z$$
$$(\sin z)' = \cos z$$
$$(\cosh z)' = \sinh z$$
$$(\sinh z)' = \cosh z$$
$$(\log z)' = \frac{1}{z}$$

$\log z$ er defineret på $\mathbb{C}$ fraregnet en halvlinje ud fra 0.

Definition 3.6. For en reel-differentiabel kompleks funktion $f(x+yi) = u(x,y) + v(x,y)i$ er *Cauchy-Riemann ligningerne*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

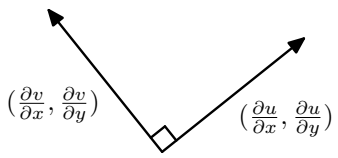
Ligningerne udtrykker, at de reelle vektorfelter

$$(u, -v) \quad \text{og} \quad (v, u)$$

begge er rotationsfrie eller at differentialformerne

$$u\,dx - v\,dy \quad \text{og} \quad v\,dx + u\,dy$$

er lukkede.



Skitse 3.6.1. Gradienter er vinkelrette.

Hovedsætning 3.7. *$f = u + vi$ er holomorf i et område, hvis og kun hvis u, v er differentiable og Cauchy-Riemann ligningerne er opfyldte. I så fald er*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z)$$

Bevis. Antag $f(0) = 0$ og $f'(0) = a + bi$. Nær 0 er

$$u(x,y) + v(x,y)i \approx (a+bi)(x+yi) = (ax - by) + (bx + ay)i$$

hvis og kun hvis i 0

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = b = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Eksempel 3.8. Lad $f = u + vi$. Hvis de partielle afledede af u, v eksisterer og er kontinuerte, så er u, v differentiable og hvis Cauchy-Riemann ligningerne er opfyldte, så er f holomorf.

Eksempel 3.9. Lad $f = u + vi$ og bemærk

$$f\,dz = f\,dx + if\,dy = u\,dx - v\,dy + i(v\,dx + u\,dy)$$

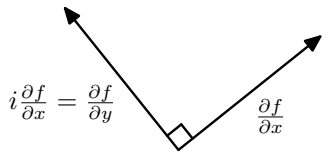
Cauchy-Riemann ligningerne kan skrives på den mere kompakte form

$$i\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

altså differentialformen

$$f\,dz$$

er lukket.



Skitse 3.9.1. Drejning på $\frac{\pi}{2}$.

I så fald er den afledede

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z)$$

Jacobi-determinanten er positiv, idet

$$|f'|^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

Altså bevarer en holomorf funktion vinkler og orientering i den komplekse plan i punkter, hvor $f'(z) \neq 0$.

Øvelse 3.10. Lad f være holomorf i et område $\mathcal{D}$ og antag $f' = 0$ på $\mathcal{D}$. Så er f konstant.

Øvelse 3.11. Antag f er holomorf i et område $\mathcal{D}$ og $f(\mathcal{D}) \subset \mathbb{R}$. Så er f konstant. Thi $f = u + vi$ og $v = 0$ giver

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Så $f' = 0$ på $\mathcal{D}$.

Eksempel 3.12. $\log z$ er holomorf med $(\log z)' = \frac{1}{z}$ på $\mathbb{C}$ fraregnet en halvlinje ud fra 0. Hertil skrives

$$\log(x + yi) = \log\sqrt{x^2 + y^2} + i\arctan\frac{y}{x}$$

$$u = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2),\ v = \arctan\frac{y}{x}$$

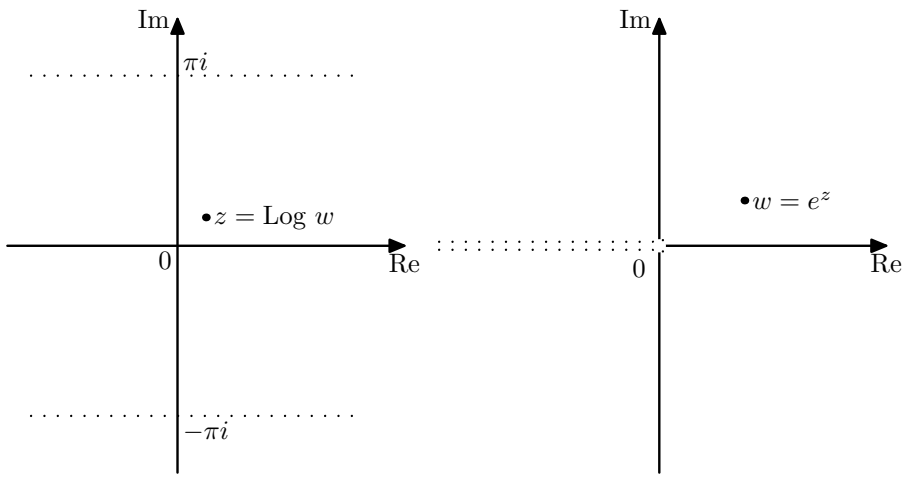
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Så Cauchy-Riemanns ligninger er opfyldte og

$$(\log z)' = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}$$



Skitse 3.12.1. z-logaritmer og w-eksponentialer.

Øvelse 3.13. Funktionerne $z \mapsto \overline{z}$ og $z \mapsto |z|$ er ikke holomorfe i noget område. Er $z \mapsto z + \overline{z}$ holomorf?

Øvelse 3.14. Lad $\arg z$ være bestemt som funktion i et område. Bestem de partielle afledede. Er funktionen holomorf?

Opgaver

Opgave 3.1. Angiv stamfunktioner til

$$z^n,\ e^z,\ \log z$$

Opgave 3.2. Beregn den afledede af

$$\arccos z,\ \tan z,\ \arctan z$$

Opgave 3.3. Lad f være holomorf. Vis, at funktionen

$$z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$$

er holomorf.

Opgave 3.4. Vis, direkte, at differentialformen $z^{-1}\,dz$ er lukket.

Opgave 3.5. Beregn de partielle afledede og afgør om funktionerne er holomorfe.

(1) $x^2 + iy$.
(2) $x - 2y + (2x + y)i$.
(3) $x^2 - y^2 i$.

Opgave 3.6. Find $f = u + vi$ holomorf, så

(1) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.
(2) $v(x, y) = e^{-y} \sin x$.

Opgave 3.7. Hvis $f = u + vi$ er holomorf (u, v to gange kontinuert differentiable), så er

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Opgave 3.8. Antag f er holomorf i et område $\mathcal{D}$. Hvis enten $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ eller $|f|$ er konstant i $\mathcal{D}$, så er f konstant.

Opgave 3.9. Antag f er holomorf i et område $\mathcal{D}$. Hvis $f(\mathcal{D})$ er indeholdt i en linje, så er f konstant.

Opgave 3.10. Skriv en funktion på "polær" form

$$f(re^{i\theta}) = R(r, \theta)e^{i\Theta(r,\theta)}$$

Cauchy-Riemann ligningerne har da formen

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{R}{r}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = -Rr\frac{\partial \Theta}{\partial r}$$

4. Kompleks kurveintegral

Plan vektoranalyse, kurveintegral og Greens sætning tilpasses som hjælpemiddel for analyse af komplekse funktioner. En kort omtale af omløbstal benyttes ikke senere.

Definition 4.1. En *kurve* c i $\mathbb{C}$ antages at være kontinuert, orienteret med stykkevis kontinuert differentiabel parameter fremstilling $z(t), t \in [\alpha, \beta]$. En kurve er *simpel* hvis $z(t_1) \neq z(t_2)$ for $t_1 < t_2$. Hvis kurven er *lukket* $z(\alpha) = z(\beta)$ kaldes denne *simpel* hvis $z(t_1) \neq z(t_2)$ for $t_1 < t_2 < \beta$.
Længden af c er

$$L(c) = \int_\alpha^\beta |z'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

nemlig grænseværdien af

$$\sum |z_{i+1} - z_i| \approx \sum |z'(t_i)|(t_{i+1} - t_i)$$

for finere inddeling af kurven.
For en kontinuert kompleks funktion f defineret på c er *kurveintegralet* givet ved

$$\int_c f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\, dt$$

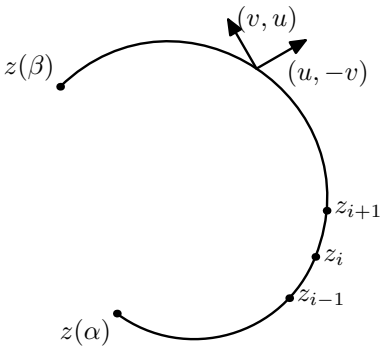
Hvis kurven er lukket bruges også betegnelsen

$$\int_c f(z)dz = \oint_c f(z)dz$$

Kurveintegralet er grænseværdien af summen

$$\sum f(z_i)(z_{i+1} - z_i) \approx \sum f(z(t_i))z'(t_i)(t_{i+1} - t_i)$$

for finere inddelinger af kurven c.



Skitse 4.1.1. Kurve med inddeling og vektorfelt.

For $z = x + yi,\ f = u + vi$ er

$$\int_c f(z)\, dz \quad = \quad \int_c (u + vi)\, d(x + yi)$$

$$= \int_c u\,dx - v\,dy + i\int_c v\,dx + u\,dy$$

Kurveintegralet er da det komplekse tal, hvis realdel er integralet af formen $udx - vdy$ og hvis imaginær del er integralet af $vdx + udy$ langs kurven.
På vektorform

$$\int_c f(z)\,dz = \int_c (u,-v)\cdot(dx,dy) + i\int_c (v,u)\cdot(dx,dy)$$

er kurveintegralet det komplekse tal, hvis realdel er arbejdet af vektorfeltet $(u,-v)$ langs kurven og hvis imaginær del er fluxen af samme felt gennem kurven.
De kendte regneregler for kurveintegraler kan udnyttes, specielt ved parameterskift er integralet uændret, når gennemløbsretningen er bevaret, og skifter fortegn ved modsat retning.

Øvelse 4.2. For kurver z_1, z_2 er z_1z_2 en kurve med

$$(z_1z_2)'(t) = z_1'(t)z_2(t) + z_1(t)z_2'(t)$$

Hvis z er en kurve i et område hvor $f(z)$ er holomorf, så er $f(z)$ en kurve med

$$f(z(t))' = f'(z(t))z'(t)$$

Øvelse 4.3. For $z = x + yi,\ f = u + vi$ er

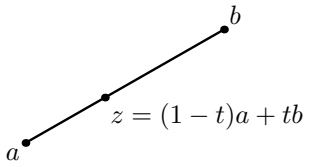
$$\begin{aligned}\int_c f(z)\,dz &= \int_\alpha^\beta (u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t))\,dt \\ &\quad + i\int_\alpha^\beta (v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t))\,dt\end{aligned}$$

Eksempel 4.4. Linjestykket $[a,b]$ fra a til b i $\mathbb{C}$ har en parameterfremstilling

$$z(t) = (1-t)a + tb,\ \ t \in [0,1]$$

Længden er

$$\int_0^1 |b-a|\,dt = |b-a|$$



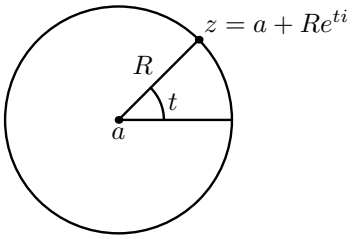
Skitse 4.4.1. Linjestykke.

Cirklen $|z-a| = R$ med centrum i a og radius R samt positiv omløbsretning har en parameterfremstilling

$$z(t) = a + Re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

Længden er

$$\int_0^{2\pi} R\,dt = 2\pi R$$



Skitse 4.4.2. Cirkel med radius R.

Eksempel 4.5. For et helt tal n er

$$\oint_{|z-a|=R} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq -1 \\ 2\pi i & , \quad n = -1 \end{cases}$$

Thi værdien er

$$\int_0^{2\pi} iR^{n+1} e^{(n+1)it}\,dt$$

Eksempel 4.6. Halvcirklen $|z| = 1$ i øvre halvplan har en parameterfremstilling

$$z(t) = e^{it},\ t \in [0, \pi]$$

Integralet

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \pi i$$

Ved parameterfremstillingen

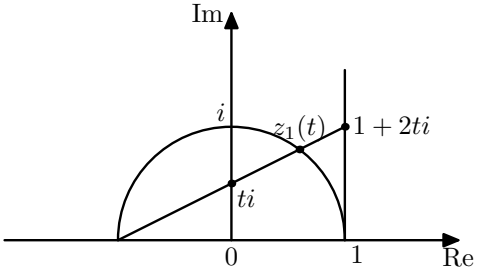
$$z_1(t) = \frac{1+ti}{1-ti},\ t \in [0, \infty]$$

giver

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \int_0^\infty \frac{1-ti}{1+ti} \frac{2i}{(1-ti)^2}\,dt$$

I alt den kendte formel

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$



Skitse 4.6.1. En snu parametrisering.

Sætning 4.7. *Hvis $|f(z)| \leq M$ for $z \in c$ gælder vurderingen*

$$\left| \int_c f(z)\, dz \right| \leq M \cdot L(c)$$

Bevis. Der gælder

$$\left| \int_c f(z)\, dz \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(z(t))z'(t)|\, dt \leq M \cdot L(c)$$

Alternativt

$$\begin{aligned} \left|\int_c f(z)\, dz\right| &\approx |\sum f(z_i)(z_{i+1} - z_i)| \leq \sum |f(z_i)||z_{i+1} - z_i| \\ &\leq \sum M|z_{i+1} - z_i| \approx M \cdot L(c) \end{aligned}$$

Eksempel 4.8. Lad c_u være kurven med parameterfremstilling

$$z(t) = e^{it},\ t \in [0, u]$$

Da er

$$\lim_{u \to 0} \int_{c_u} e^{z^2} dz = 0$$

Thi

$$|e^{z^2}| \leq M,\ z \in c_1$$

så for $u < 1$

$$\left| \int_{c_u} e^{z^2} dz \right| \leq ML(c_u) = Mu \to 0,\ u \to 0$$

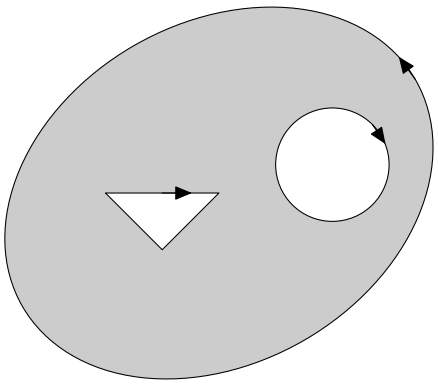
Øvelse 4.9. Lad c_R være kurven med parameterfremstilling

$$z(t) = Re^{it},\ t \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

Da er

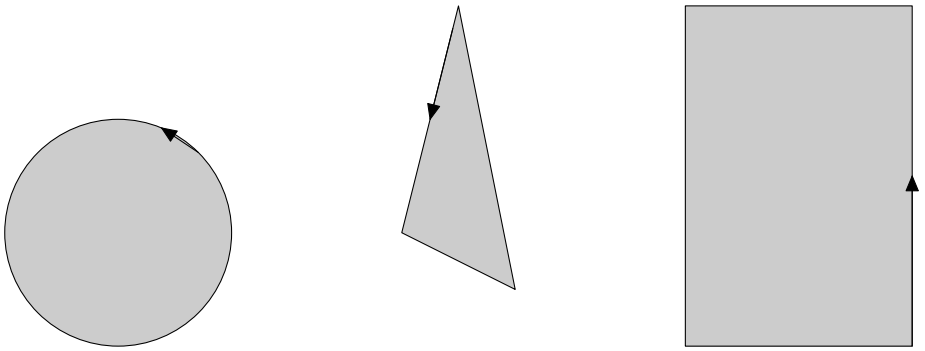
$$\lim_{R \to \infty} \int_{c_R} \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz = 0$$

Definition 4.10. En kompakt mængde K, hvis indre er et område og hvis rand består af et sæt $c_1, \ldots, c_m$ af disjunkte simple lukkede kurver med gennemløbsretning fra K kaldes en *indhegning*. Punkter i det indre af K er *indenfor* indhegningen.
(Hvis omløbsretningen i $\mathbb{C}$ er mod uret, skal K være på venstre hånd ved gennemløb af kurven i positiv retning.)



Skitse 4.10.1. Generel indhegning.

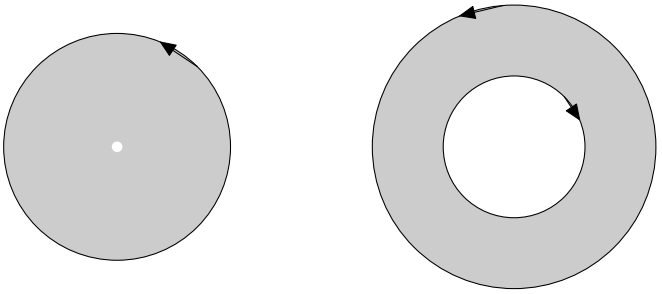
Eksempel 4.11. En lukket cirkelskive, hvis periferi har positiv omløbsretning er en indhegning.
En trekant, et rektangel og mere generelt en polygon med positiv omløbsretning er en indhegning.



Skitse 4.11.1. Populære indhegninger.

Eksempel 4.12. Den udprikkede enhedscirklenskive $0 < |z| \leq 1$ er ikke en lukket delmængde og dermed ikke en indhegning. En lukket cirkelring $r \leq |z| \leq R$, hvis rand er givet ved kurverne

$$c_r : t \mapsto re^{-it},\ c_R : t \mapsto Re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$



Skitse 4.12.1. Udprikket er ej lukket. Cirkelring er indhegning.

er en indhegning.

Hovedsætning 4.13 (Greens sætning)**.** *Lad f være reel-kontinuert differentiabel i et område $\mathcal{D}$. For enhver indhegning K med rand $c_1, \ldots, c_m$ i $\mathcal{D}$ er*

$$\oint_{c_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{c_m} f(z)\,dz = \iint_K (i\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\,dA$$

Bevis. I en omegn af z er

$$f(z+dz) \approx f(z) + \frac{\partial f}{\partial x}(z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z)dy$$

For randen c af et infinitisimalt rektangel K er

$$\begin{aligned}
\oint_c f(z)dz &\approx f(z)dx + f(z+dx)idy - f(z)idy - f(z+idy)dx \\
&\approx f(z)dx + (f(z) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(z)dx)idy - f(z)idy - (f(z) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(z)dy)dx \\
&\approx \textstyle\iint_K (i\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\,dA
\end{aligned}$$

Et generelt K overdækkes med et fintmasket kvadratnet og så følger påstanden ved videreindeling (svært).

Eksempel 4.14. Lad K være en indhegning med rand $c_1, \ldots, c_m$. Arealet af K er da

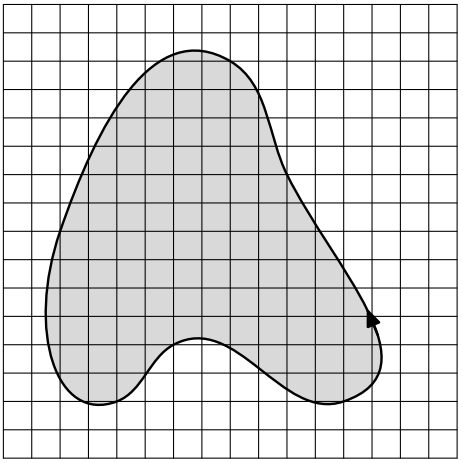
$$A(K) = \frac{1}{2i}\oint_{c_1} \overline{z}\,dz + \cdots + \frac{1}{2i}\oint_{c_m} \overline{z}\,dz$$

Øvelse 4.15. En lukket cirkelring $r \le |z| \le R$ med rand

$$c_r : t \mapsto re^{-it},\ c_R : t \mapsto Re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

har areal

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2i}\oint_{c_r} \overline{z}\,dz + \frac{1}{2i}\oint_{c_R} \overline{z}\,dz \\
&= \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} re^{it}(-i)re^{-it}\,dt + \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} Re^{-it}iRe^{it}\,dt
\end{aligned}$$



Skitse 4.13.1. Greens situation.

$$= \pi(R^2 - r^2)$$

Definition 4.16. Lad c være en lukket kurve. For $a \notin c$ er *indeks* (*omløbstal*)

$$I(c,a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{1}{z-a}\, dz$$

Som det fremgår af beviset nedenfor angiver omløbstallet, hvormange gange man ved at følge kurven kommer helt omkring punktet a regnet med fortegn.

Sætning 4.17. *Indeks opfylder*

(1) $I(c,a)$ *er et helt tal.*
(2) $I(c,a)$ *varierer kontinuert med* a.

Bevis. Antag $a = 0$. (1) Ved inddeling af kurven vises, at parameterfremstillingen kan skrives på polær form

$$z(t) = r(t)e^{\theta(t)i},\ t \in [\alpha, \beta]$$

Hvoraf

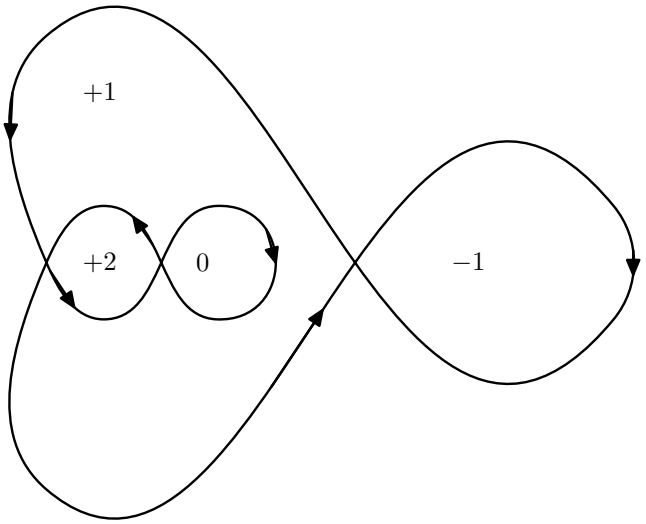
$$I(c,0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta (\frac{r'(t)}{r(t)} + \theta'(t)i)\, dt = \frac{\theta(\beta) - \theta(\alpha)}{2\pi}$$

er et helt tal, da kurven er lukket. (2) For b i en cirkelskive $|z| \leq R$ som ikke møder c forløber kurven c_1 med parameterfremstilling

$$\frac{z(t) - b}{z(t)}$$

helt i cirkelskiven $|z - 1| < 1$. Så ved valg af θ som ovenfor fås $I(c_1, 0) = 0$. Det følger

$$I(c,b) = I(c,0) + I(c_1,0) = I(c,0)$$



Skitse 4.17.1. Omløbstal per øjemål.

Alternativt (1)

$$g(u) = \int_\alpha^u \frac{z'(t)}{z(t)}\,dt$$

opfylder

$$\frac{d}{du}\, e^{-g(u)} z(u) = 0$$

så

$$e^{-g(\alpha)} z(\alpha) = e^{-g(\beta)} z(\beta)$$

og dermed $g(\beta) = 2p\pi i$. (2)

$$|I(c,b) - I(c,0)| \le \max_{z\in c} \left| \frac{1}{z-b} - \frac{1}{z} \right| L(c)$$

Eksempel 4.18. Lad c være randen af cirklen $|z-b| = R$ med positiv omløbsretning

$$I(c,a) = \begin{cases} 1 & |a-b| < R \\ 0 & |a-b| > R \end{cases}$$

Thi ved kontinuitet er $I(c,a) = I(c,b)$ for $|a-b| < R$ og $I(c,a) = 0$ for $|a| \to \infty$.

Opgaver

Opgave 4.1. Beregn længden af kurven c

$$L(c) = \int_\alpha^\beta |z'(t)|\,dt$$

hvor $z(t)$ er parameterfremstilling for

(1) Linjestykket fra $1+i$ til $2-i$.
(2) Enheds halvcirklen i øvre halvplan.
(3) Linjestykket fra 1 til i fortsat med cirkelbuen fra i til -1 med radius 1 og centrum i 0.

Opgave 4.2. Beregn integralerne

$$\int_c \operatorname{Re} z\, dz, \ \int_c \overline{z}\, dz, \ \int_c |z|^2\, dz$$

hvor c er kurven

(1) Linjestykket fra 1 til -1.
(2) Enheds halvcirklen i øvre halvplan.
(3) Linjestykket fra 1 til i fortsat med linjestykket fra i til -1.

Opgave 4.3. Lad c_R være halvcirklen i øvre halvplan. Gør rede for, at

$$\int_{c_R} \frac{1}{z^2-1} dz \to 0, \ R \to \infty$$

og

$$\int_{c_R} \frac{1}{z^2-1} e^{iz} dz \to 0, \ R \to \infty$$

Opgave 4.4. Beregn indeks

$$I(c,0)$$

hvor c er den lukkede kurve (med positivt omløb)

(1) Cirklen $|z| = 1$.
(2) Kvadrat med hjørner $1+i, -1+i. -1-i, 1-i$.
(3) Ellipsen $z(t) = a\cos t + i \sin t, \ t \in [0, 2\pi]$.

Opgave 4.5. Beregn integralerne

$$\oint_c \frac{1}{z-i}\, dz, \ \oint_c \frac{1}{z+i}\, dz, \ \oint_c \frac{1}{z^2+1}\, dz$$

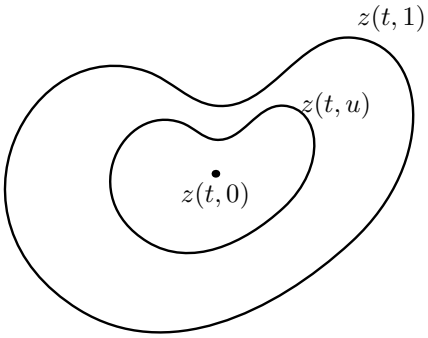
hvor c er den lukkede kurve (med positivt omløb)

(1) Cirklen $|z-i| = 1$.
(2) Cirklen $|z+i| = 1$.
(3) Cirklen $|z| = 2$.

Opgave 4.6. Hvis en simpel lukket kurve c kan sammentrækkes til et punkt i området $\mathcal{D}$, dvs.

$$z : [\alpha, \beta] \times [0,1] \to \mathcal{D}$$
$$z(\alpha, u) = z(\beta, u) = z(t, 0) \ \text{ for alle } t, u$$
$$z(t, 1) \ \text{ fremstiller } c$$

så er c randen af en indhegning i $\mathcal{D}$.



Skitse 4.18.1. Sammentrækning af kurve.

Opgave 4.7. Hvis en kontinuert funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C} - \{0\}$ har

$$I(f(c), 0) = 0$$

for enhver lukket kurve c i $\mathcal{D}$. Så findes en kontinuert funktion $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ som giver

$$f = e^g$$

Opgave 4.8. Lad $z_1(t), z_2(t) \neq 0$ give lukkede kurver c_1, c_2.

(1) Lad c være kurven givet ved produktet $z_1(t)z_2(t)$, så er

$$I(c, 0) = I(c_1) + I(c_2)$$

(2) Hvis $|z_1(t) - z_2(t)| \leq |z_1(t)|$ for alle t, så er

$$I(c_1) = I(c_2)$$

Opgave 4.9. *Brouwers fixpunktssætning.* Lad f være kontinuert på cirkelskiven $|z| \leq 1$.

(1) Hvis $f(z) \neq 0$ for $|z| \leq 1$, så er

$$I(f(|z| = r), 0) = 0, \ r \in [0, 1]$$

(2) Hvis $|f(z)| \leq 1$ for $|z| \leq 1$, så har f et fixpunkt $|z_0| \leq 1$

$$f(z_0) = z_0$$

5. Cauchys integralsætninger

Cauchys integralsætninger og -formler fås fra Greens sætning. En række populære resultater udledes, algebraens fundamentalsætning, Liouvilles sætning og maksimumsprincippet.

Eksempel 5.1. En funktion F er (reel)-stamfunktion til f når differentialerne

$$dF = f dz$$

Da

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy, \quad f dz = f dx + i f dy$$

opfylder F Cauchy-Riemanns ligninger

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f, \ \frac{\partial F}{\partial y} = if$$

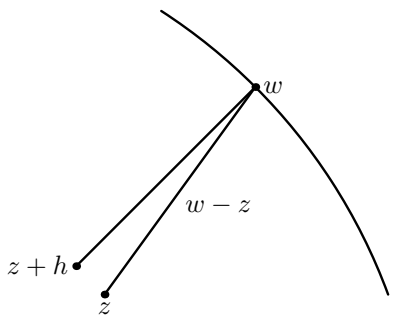
og er derfor (holomorf)-stamfunktion til f.
Polynomier og eksponentialfunktionen har stamfunktioner i ethvert område.

Eksempel 5.2. Lad f være en kontinuert funktion på en kurve c. Funktionen

$$F(z) = \int_c \frac{f(w)}{w - z} \, dw$$

er holomorf i $\mathbb{C}$ fraregnet c.
Den afledede er

$$F'(z) = \int_c \frac{f(w)}{(w - z)^2} \, dw$$



Skitse 5.2.1. Konstruktion af holomorf funktion.

$$F(z + h) - F(z) = \int_c f(w)(\frac{1}{w - z - h} - \frac{1}{w - z}) \, dw \approx h \int_c \frac{f(w)}{(w - z)^2} \, dw$$

Sætning 5.3. *Lad f være kontinuert i et område $\mathcal{D}$. Følgende er ækvivalent*

(1) *f har en stamfunktion i $\mathcal{D}$.*

(2) *Ethvert lukket kurveintegral*

$$\oint_c f(z)\,dz = 0$$

(3) *Ethvert kurveintegral*

$$\int_c f(z)\,dz$$

afhænger kun af kurvens endepunkter.

Hvis F er en stamfunktion til f og c begynder i a og slutter i b, så er

$$\int_c f(z)\,dz = F(b) - F(a)$$

Bevis. Hvis F er en stamfunktion, så er

$$\frac{d}{dt}F(z) = f(z(t))z'(t)$$

Omvendt hvis kurveintegralet kun afhænger af endepunkter, så er

$$F(z) = \int_c f(w)dw$$

hvor c er en kurve fra et fast punkt til z, en stamfunktion til f, idet

$$\frac{F(z+h-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)dw \ \to f(z),\ h \to 0$$

Øvelse 5.4. For kurven c

$$z(t) = e^{\sin(t-t^2 i)},\ 0 \le t \le 1$$

beregnes $\int_c -\frac{1}{z^2}dz$.
Da $(\frac{1}{z})' = -\frac{1}{z^2}$ fås

$$\int_c -\frac{1}{z^2}dz = [\frac{1}{z}]_{e^0}^{e^{\sin(1-i)}} = e^{-\sin(1-i)} - 1$$

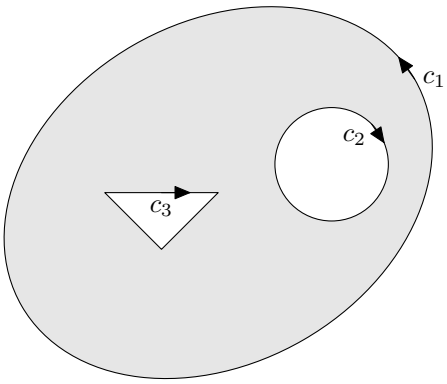
Hovedsætning 5.5 (Cauchys integralsætning)**.** *Lad f være holomorf i et område $\mathcal{D}$. For enhver indhegning K med rand $c_1, \ldots, c_m$ i $\mathcal{D}$ er*

$$\oint_{c_1} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{c_m} f(z)\,dz = 0$$

Bevis. Greens sætning giver at venstre siden er

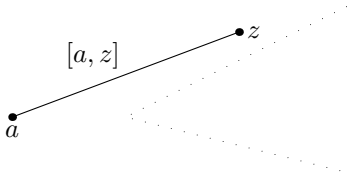
$$\iint_K (i\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})\,dA = 0$$

fra Cauchys ligninger.



Skitse 5.5.1. Cauchys sætning for en indhegning.

Sætning 5.6. *En holomorf funktion f i et stjerneområde $\mathcal{D}$ har en stamfunktion i $\mathcal{D}$.*
En holomorf funktion har lokalt en stamfunktion.



Skitse 5.6.1. Stjerneområde.

Bevis. Trekanter er indhegninger, så fra et udsigtspunkt a er

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(w)\, dw$$

en stamfunktion.

Eksempel 5.7. For enhver indhegning K med rand $c_1, \ldots, c_m$ er

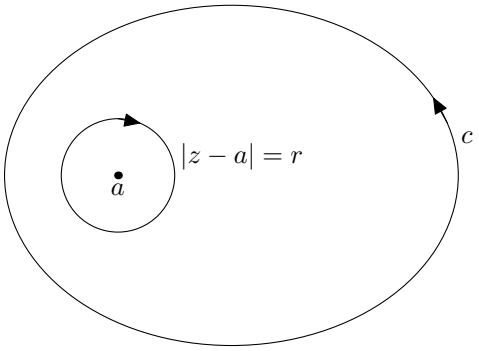
$$\oint_{c_1} \frac{1}{z-a}\, dz + \cdots + \oint_{c_m} \frac{1}{z-a}\, dz = \begin{cases} 2\pi i & , \quad \text{for } a \text{ indenfor } K \\ 0 & , \quad \text{for } a \text{ ikke i } K \end{cases}$$

For a indenfor indhegningen er integralets værdi

$$\oint_{|z-a|=r} \frac{1}{z-a}\, dz = 2\pi i$$

for en tilpas lille cirkel om a. For a ikke i K er integranten holomorf om K.

Øvelse 5.8. $\frac{1}{z}$ har ikke en stamfunktion i $\mathbb{C} - \{0\}$. Men $\log z$ er stamfunktion i $\mathbb{C}$ fraregnet en halvlinje ud fra 0.



Skitse 5.7.1. En cirkel om a tilføjet.

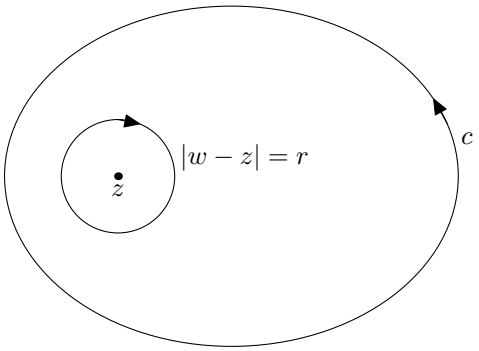
Øvelse 5.9. $\sqrt{z}$ har en stamfunktion i $\mathbb{C}$ fraregnet den negative reelle halvakse.

Hovedsætning 5.10 (Cauchys integralformler)**.** *Lad f være holomorf i et område $\mathcal{D}$ og lad K med rand $c_1, \ldots, c_m$ være en indhegning i $\mathcal{D}$. For alle z indenfor indhegningen er*

$$f(z) = \sum_j \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_j} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

og

$$f^{(n)}(z) = \sum_j \frac{n!}{2\pi i} \oint_{c_j} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw$$



Skitse 5.10.1. Afledede i z bestemt i en cirkel om z.

Bevis. Anvend Cauchys sætning, $j = 1$.

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$$

er holomorf, så

$$\oint_c \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = 0$$

Hvoraf

$$\oint_c \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z)\oint_c \frac{1}{w-z}\,dw$$

som med eksempel 5.7 giver den første formel. Dernæst differentier under integraltegnet.

Øvelse 5.11. For $|z|<1$ er

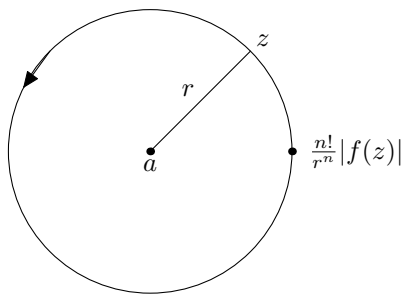
$$e^z = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=1} \frac{e^w}{w-z}\,dw$$

og

$$e^z = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|w|=1} \frac{e^w}{(w-z)^{n+1}}\,dw$$

Sætning 5.12 (Cauchys uligheder)**.** *Lad f være holomorf i et åbent område som indeholder cirkelskiven $|z-a|\le r$. Da vurderes de afledede*

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!}{r^n}\max_{|z-a|=r}|f(z)|$$



Skitse 5.12.1. Maksimer langs cirkel.

Bevis. Integralformlerne.

Sætning 5.13 (Liouvilles sætning)**.** *En holomorf og begrænset funktion i hele $\mathbb{C}$ er konstant.*

Bevis. Antag $|f(z)|\le M$. Ved Cauchys uligheder er

$$|f'(z)| \le \frac{M}{R} \to 0,\ R\to\infty$$

Øvelse 5.14. Samme bevis som ovenfor giver, at en holomorf funktion f i $\mathbb{C}$ som opfylder

$$|f(z)| \leq |z|^n$$

for $|z|$ stor er et polynomium af grad højst n.

Sætning 5.15 (Algebraens fundamentalsætning)**.** *Et ikke konstant polynomium*

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

har en rod i $\mathbb{C}$.

Bevis. Anvend Liouvilles sætning på funktionen

$$\frac{1}{p(z)}$$

Eksempel 5.16. Et n-te grads polynomium faktoriserer i 1. grads led

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = (z - c_1) \cdots (z - c_n)$$

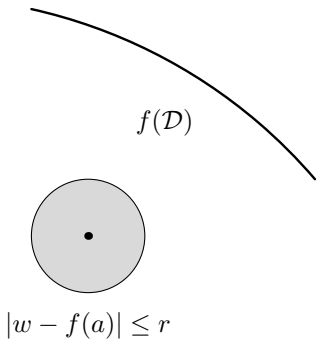
En ægte brøk rational funktion har en partialbrøkfremstilling

$$\sum_i \frac{a_i}{(z - b_i)^{n_i}}$$

Et reelt polynomium faktoriserer i reelle 1. og 2. grads led. En reel ægte brøk rational funktion har en partialbrøkfremstilling

$$\sum_i \frac{a_i}{(x - b_i)^{n_i}} + \sum_j \frac{a_j x + b_j}{(x^2 + c_j x + d_j)^{n_j}}$$

Sætning 5.17 (Åben afbildning)**.** *Hvis f er holomorf og ikke konstant i et område $\mathcal{D}$, så er billedmængden $f(\mathcal{D})$ et område, dvs. åben og sammenhængende.*



Skitse 5.17.1. En lille cirkelskive om billedpunktet er i billedet.

Bevis. Åben: Antag $f(0) = 0$, $\epsilon > 0$ og $f(z) \neq 0$ for $0 < |z| \leq \epsilon$. Lad $|w| < \frac{1}{2}\min_{|z|=\epsilon}|f(z)|$ og modsætningsvist $f(z) \neq w$ for $|z| \leq \epsilon$. Ved Cauchys uligheder fås modstrid

$$\frac{1}{|w|} < \min_{|z|=\epsilon} \frac{1}{|f(z) - w|}$$

Eksempel 5.18. Hvis f er holomorf og injektiv i et område $\mathcal{D}$, så er $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in \mathcal{D}$. Den inverse funktion er holomorf på området $f(\mathcal{D})$ med den afledede

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Sætning 5.19 (Maksimumsprincippet)**.** *Hvis $|f(a)|$ er et lokalt maksimum for en holomorf funktion f i et område, så er f konstant.*

Bevis. Åben afbildning sætning.

Opgaver

Opgave 5.1. Beregn

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^5 - 2} dz$$

Opgave 5.2. Beregn

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z-5} dz$$
$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z-1} dz$$

Opgave 5.3. Beregn

$$\int_c e^{3z} \sin iz \, dz$$

for enhver kurve c, der starter i 0 og slutter i $\frac{1}{2}\pi i$.

Opgave 5.4. Beregn

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^3} \, dz$$

Opgave 5.5. Hovedbestemmelsen af logaritmefunktionen er givet ved

$$\operatorname{Log} w = \int_{[1,w]} f(z) \, dz$$

for w i $\mathbb{C}$ fraregnet den negative reelle halvakse.

Opgave 5.6. Vis, at
$$\oint_c \frac{1}{z(z-1)} dz = 0$$
for en simpel lukket kurve c som ikke møder linjestykket $[0,1]$.

Opgave 5.7. Der er ingen bijektiv afbildning af den åbne enhedscirkelskive på den komplekse plan, hvor afbildning og den inverse afbildning begge er holomorfe.

Opgave 5.8. Hvis f, g er holomorfe i $\mathcal{D}$ og $|f| + |g|$ antager et maksimum i $\mathcal{D}$, så er f, g konstante.

Opgave 5.9. Hvis f er holomorf i $\mathcal{D}$ og
$$f'' = -f \quad \text{samt der findes } a \in \mathcal{D}, f(a) = f'(a) = 0$$
så er $f = 0$.

Opgave 5.10. En uforkortelig ægte brøk rational funktion med simple rødder $b_1, \ldots, b_n$ i nævneren har en partialbrøkfremstilling
$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_i \frac{p(b_i)}{q'(b_i)} (z - b_i)^{-1}$$
Find fremstillingen af
$$\frac{z^3}{z^4 - 16}$$

Opgave 5.11. Lad f er holomorf i $\mathcal{D}$ som indeholder enhedscirkelskiven. For $z \in \mathcal{D}$ er
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \frac{\overline{f(w)}}{w - z} dw = \begin{cases} \overline{f(0)} & \text{for } |z| < 1 \\ \overline{f(0)} - \overline{f(\frac{1}{z})} & \text{for } |z| > 1 \end{cases}$$

6. Potensrækker

Konvergensteorien for komplekse potensrækker er analog til det reelle tilfælde. De elementære funktioner udvikles i Taylorrækker. Fra Cauchys integralsætninger følger, at enhver holomorf funktion om ethvert punkt i sit definitionsområde kan udvikles i sin Taylorrække med positiv konvergensradius. Det ses, at den afledede af en holomorf funktion igen er holomorf.

Definition 6.1. En potensrække om a

$$\sum a_n(z-a)^n$$

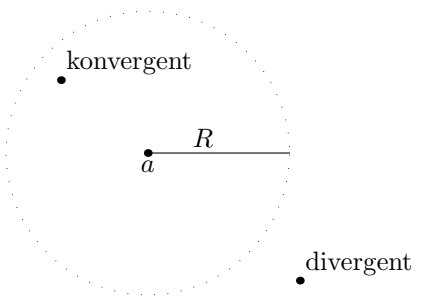
har konvergensradius $0 \leq R \leq \infty$

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

som adskiller konvergens og divergens

$$\sum a_n(z-a)^n \begin{cases} |z-a| < R, & \text{konvergent} \\ |z-a| > R, & \text{divergent} \end{cases}$$

Hvis $0 < R$ kaldes sumfunktionen *analytisk*.



Skitse 6.1.1. Konvergensradius.

Øvelse 6.2 (Kvotientkriteriet)**.** Hvis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R$$

så er konvergensradius R.

Øvelse 6.3. For $\sum a_n z^n$ og $\sum b_n z^n$ er produktrækken $\sum c_n z^n$, hvor

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

Produktrækkens sumfunktion er produktet af faktorernes sumfunktioner.

Sætning 6.4. *Hvis $0 < R$ er sumfunktionen holomorf i konvergenscirkelskiven og har afledet og stamfunktion givet ved*

$$f(z) = \sum a_n (z-a)^n$$

$$f'(z) = \sum a_n n (z-a)^{n-1}$$

$$\int f(z)\,dz = \sum \frac{1}{n+1} a_n (z-a)^{n+1}$$

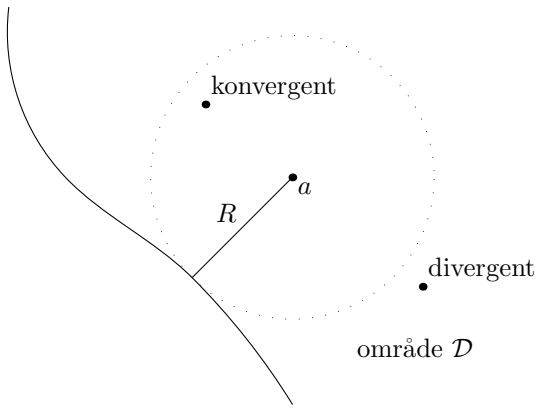
Hovedsætning 6.5 (Taylorrækken)**.** *En funktion f som er holomorf i en omegn af a har en Taylorrække fremstilling*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

for en tilpas lille cirkel med centrum a.
Hvis området $\mathcal{D}$ er maksimalt, så er konvergens radius R er givet ved radius af den største åbne cirkelskive indeholdt i $\mathcal{D}$.
For komplekse funktioner er holomorf og analytisk ækvivalente betingelser.



Skitse 6.5.1. Konvergensradius er størst mulig.

Bevis. Identiteten

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

sammen med Cauchys integralformler for en lille cirkel $|w-a| = r$ giver potensrækkefremstillingen

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \ (z-a)^n$$

Eksempel 6.6. De elementære funktioner har Taylorrækker givet ved de kendte formler

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \\
\operatorname{Log}(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} z^n \\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\
\cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \\
\sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\
\arctan z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} z^{2n+1} \\
\arcsin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \binom{-\frac{1}{2}}{n} z^{2n+1}
\end{aligned}$$

Øvelse 6.7. Funktionen $\frac{1}{1+z}$ har Taylorrække

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Funktionen $\frac{e^z}{1+z}$ har Taylorrække

$$\frac{e^z}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Eksempel 6.8 (Binomialrækken)**.** For $|z| < 1$ er

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

Hvis α ikke er et positivt helt tal, så er konvergensradius netop 1. Binomialkoefficienterne er givet ved

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

og opfylder

$$\binom{\alpha}{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1}\binom{\alpha}{n}$$

samt "Pascals trekant"

$$\binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha+1}{n+1}$$

Potensen kommer fra hovedbestemmelsen af logaritmen

$$(1+z)^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)}$$

Fra kvotientkriteriet følger konvergensen og en udregning med binomialkoefficienter viser

$$(1+z)\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

og

$$(1+z)\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

Da potensfunktionen $(1+z)^\alpha$ opfylder samme regneregler følger identiteten af de to udtryk.
I koordinater fås det imponerende udtryk (Abel)

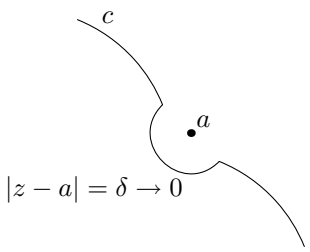
$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \binom{u+vi}{n} (x+yi)^n &= (1+x+yi)^{u+vi} \\
&= \sqrt{(1+x)^2+y^2}^{\,u} e^{-v \operatorname{Arctan} \frac{y}{1+x}} \\
&\quad \times \Bigg(\cos(u \operatorname{Arctan} \frac{y}{1+x} + v \operatorname{Log} \sqrt{(1+x)^2+y^2}) \\
&\qquad + i \sin(u \operatorname{Arctan} \frac{y}{1+x} + v \operatorname{Log} \sqrt{(1+x)^2+y^2}) \Bigg)
\end{aligned}$$

Eksempel 6.9. Den afledede af en holomorf funktion er holomorf. En holomorf funktion har afledede af enhver orden, som igen er holomorfe.

Eksempel 6.10. *Moreras betingelse.* En kontinuert funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ så

$$\oint_c f(z)\,dz = 0$$

for alle lukkede kurver c i $\mathcal{D}$, er holomorf.
En kontinuert funktion som er holomorf i $\mathcal{D} - \{a\}$ er holomorf i hele $\mathcal{D}$.



Skitse 6.10.1. En lille omvej rundt a.

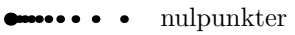
Eksempel 6.11. Hvis f er holomorf i $\mathcal{D} - \{a\}$ og

$$|f(z)| \to \infty \quad \text{for} \quad z \to a$$

så er $\frac{1}{f}$ holomorf i en åben omegn af a.

Øvelse 6.12. Funktionen $\frac{e^z - 1}{z}$ er holomorf i hele $\mathbb{C}$.

Sætning 6.13 (Identitetsprincippet)**.** *Hvis f er holomorf i et område $\mathcal{D}$ og nulpunkterne for f har et fortætningspunkt i $\mathcal{D}$, så er $f = 0$ i $\mathcal{D}$.*



Skitse 6.13.1. Et fortætningspunkt.

Bevis. Hvis alle afledede $f^{(n)}(a) = 0$ er f fremstillet ved 0-rækken i en omegn af a og det følger at f er konstant 0. I modsat fald nær a

$$f(z) = (z-a)^k g(z), \;\; g(a) \neq 0$$

og a ej et fortætningspunkt for f's nulpunkter.

Eksempel 6.14. Hvis f, g er holomorfe i et område $\mathcal{D}$ og stemmer overens på et ikke-degenereret kurvestykke, så er $f = g$ i hele $\mathcal{D}$.
En reel funktion på et interval har højst en udvidelse til en holomorf funktion i et område indeholdende intervallet.

Sætning 6.15 (Maksimumsprincippet)**.** *Hvis $|f(a)|$ er et lokalt maksimum for en holomorf funktion f i et område, så er f konstant.*

Bevis. Antag $a = 0$ og $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ for z nær 0. For små r følger det, at

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

og dermed

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = 0$$

Eksempel 6.16 (Schwarz's lemma)**.** Hvis f er holomorf for $|z| < 1$, $|f(z)| \leq 1$ og $f(0) = 0$, så er $f(z) \leq |z|$ og $|f'(0)| \leq 1$ med $=$ netop når $f(z) = az$, $|a| = 1$.
Dette følger af maksimumsprincippet for $\frac{f(z)}{z}$.

OPGAVER

Opgave 6.1. Vis, at for et reelt tal $-1 < r < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

Opgave 6.2. Bestem Taylorrækken for $\frac{1}{z}$ om $a = 1$.

Opgave 6.3. Bestem Taylorrækken for $\frac{\sin z}{z}$ om $a = 0$.

Opgave 6.4. Bestem ved brug af binomialrækken Taylorrækken for $\sqrt{1+z}$ om $a = 0$.

Opgave 6.5. Bestem konvergensradius for Taylorrækken om $a = 0$ for

$$\frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)}$$

Opgave 6.6. Vis ved potensrækker

$$\cos iz - i\sin iz = e^z$$

Opgave 6.7. En holomorf funktion f med $f'(a) \neq 0$ er injektiv i en omegn af a.

Opgave 6.8. Hvis f er holomorf i hele $\mathbb{C}$ og

$$|f(z)| \to \infty \quad \text{for} \quad |z| \to \infty$$

så er f et polynomium.

Opgave 6.9. Hvis $\operatorname{Im} f$ eller $\operatorname{Re} f$ har et lokalt maksimum eller minimum for en holomorf funktion f i et område, så er f konstant. (Betragt $e^{f(z)}$).

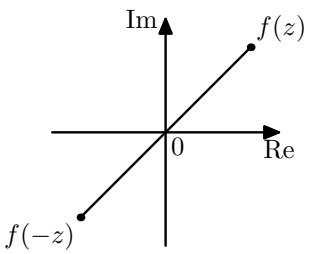
Opgave 6.10. Hvis f, g er holomorfe i et område $\mathcal{D}$ og $fg = 0$ i $\mathcal{D}$, så er $f = 0$ eller $g = 0$.

Opgave 6.11. Hvis f er holomorf i hele $\mathbb{C}$ og bevarer akser

$$f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}, \ f(\mathbb{R}i) \subset \mathbb{R}i$$

så er f ulige

$$f(z) = -f(-z), \quad \text{for alle } z$$



Skitse 6.16.1. Fastlægger funktionen fra en delmængde.

Opgave 6.12. Vis opskrivningen

$$\begin{aligned}(1+z)^\alpha &= |1+z|^{\operatorname{Re}\alpha} e^{-\operatorname{Im}\alpha \operatorname{Arctan}\frac{\operatorname{Im} z}{1+\operatorname{Re} z}} \\ &\quad \times \Bigg(\cos(\operatorname{Re}\alpha \operatorname{Arctan}\frac{\operatorname{Im} z}{1+\operatorname{Re} z} + \operatorname{Im}\alpha \operatorname{Log}|1+z|) \\ &\quad + i\sin(\operatorname{Re}\alpha \operatorname{Arctan}\frac{\operatorname{Im} z}{1+\operatorname{Re} z} + \operatorname{Im}\alpha \operatorname{Log}|1+z|)\Bigg)\end{aligned}$$

7. POLER

Taylorrækken udvides til Laurentrækken. Residuer i poler beregnes i simple tilfælde. I de næste afsnit vises, at dette er nok til bestemmelse af en lang række vigtige integraler.

Definition 7.1. For en funktion $f(z)$ holomorf i en udprikket cirkelskive $0 < |z-a| < r$ kaldes a et *isoleret singulært punkt.* Der underdeles i 3 tilfælde

(1) *hæveligt singulært punkt* (holomorf). Hvis der findes en holomorf funktion g i en omegn af a så
$$f(z) = g(z)(z-a)^k,\ g(a) \neq 0$$
Hvis $k > 0$ er a et *nulpunkt* af orden (multiplicitet) k, hvis $k = 1$ kaldes nulpunktet *simpel.*

(2) *pol af orden (multiplicitet) k.* Hvis der findes en holomorf funktion g i en omegn af a så
$$g(z) = f(z)(z-a)^k,\ g(a) \neq 0$$
Hvis $k > 0$ er har f en pol af orden k i a, hvis $k = 1$ kaldes polen *simpel.*

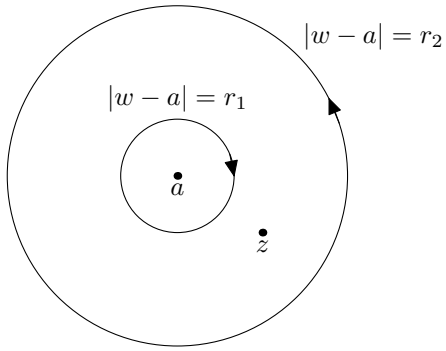
(3) *væsentligt singulært punkt.* Ikke af ovenstående type.

En funktion f er *meromorf* i et område $\mathcal{D}$, hvis f i ethvert punkt i $\mathcal{D}$ enten er holomorf eller har en pol.

Hovedsætning 7.2 (Laurentrækken)**.** *En funktion f med en isoleret singularitet i a har en Laurentrække fremstilling*
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$
konvergent i en udprikket cirkelskive om a.
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$
for en tilpas lille cirkel med centrum a.

Bevis. Identiteten
$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$
sammen med Cauchys integralformler for en lille cirkelring $r_1 < |z-a| < r_2$ giver fremstillingen
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=r_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=r_1} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \ (z-a)^n$$



Skitse 7.2.1. Cauchys sætning for cirkelring.

Eksempel 7.3. En funktion f med en isoleret singularitet i a er holomorf i a, hvis f er begrænset i en lille udprikket omegn af a. (Benyt Cauchys ulighed på $a_n,\ n < 0$).

Eksempel 7.4. En funktion f med en isoleret singularitet i a har en pol i a, hvis og kun hvis

$$|f(z)| \to \infty \text{ for } z \to a$$

Eksempel 7.5 (Weierstrass)**.** En funktion f med en isoleret singularitet i a har en væsentlig singularitet i a, hvis og kun hvis ethvert punkt w i $\mathbb{C}$ er grænsepunkt for en følge $f(z_n) \to w$ for $z_n \to a$.

Øvelse 7.6. Funktionen

$$e^{\frac{1}{z}}$$

har en væsentlig singularitet for $z = 0$.

Eksempel 7.7. En funktion f som er holomorf i a har et nulpunkt af orden k netop når

$$f(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0,\ f^{(k)}(a) \neq 0$$

Hvis

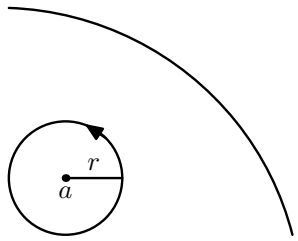
$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

hvor g resp. h har et nulpunkt i a af orden m resp. n, så har f et nulpunkt i a af orden $m-n$ når $m > n$ og en pol i a af orden $n-m$ når $m < n$ i a. Hvis g, h er holomorfe i området $\mathcal{D}$, så er f meromorf i $\mathcal{D}$.

Definition 7.8. For en funktion $f(z)$ med et isoleret singulært punkt i a er *residuet* kurveintegralet

$$R(f,a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} f(z)\,dz$$

integreret langs en tilpas lille cirkel med centrum i a, $z(t) = a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$.



Skitse 7.8.1. Residuet i en pol.

Øvelse 7.9. Residuet er veldefineret.

Sætning 7.10. *En funktion f med en pol af orden k i a kan skrives*

$$f(z) = \sum_{n \geq -k} a_n (z-a)^n$$

I så fald er residuet

$$R(f,a) = a_{-1}$$

Bevis.

$$f(z) - \frac{a_{-1}}{z-a}$$

har en stamfunktion i en lille udprikket cirkelskive om a.

Øvelse 7.11. Ved brug af Taylorrækker ses, at funktionen

$$\frac{\cos z - 1}{z^2}$$

har en hævelig singularitet i $z = 0$ og funktionen

$$\frac{\sin^2 z}{z^3}$$

har en simpel pol for $z = 0$ med residue $R = 1$.

Eksempel 7.12. Hvis f har en pol af orden k i a, så er

$$g(z) = f(z)(z-a)^k$$

holomorf i en omegn af a og

$$R(f,a) = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(a)$$

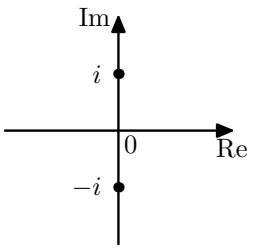
Øvelse 7.13. Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$$

har poler af orden 2 for $z = \pm i$. Residuet i $z = i$ beregnes

$$g(z) = f(z)(z-i)^2 = (z+i)^{-2}$$
$$g'(z) = -2(z+i)^{-3}$$
$$R(f,i) = \frac{1}{(2-1)!} g^{(2-1)}(i) = g'(i)$$
$$R(f,i) = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$$

Beregn residuet for $z = -i$.



Skitse 7.13.1. Polerne.

Eksempel 7.14. Hvis f har en simpel pol i a, så er

$$g(z) = f(z)(z-a)$$

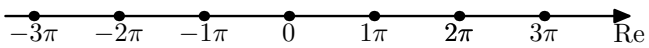
holomorf i en omegn af a og

$$R(f,a) = g(a) = \lim_{z \to a} f(z)(z-a)$$

Øvelse 7.15. Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

har poler af orden 1 for $z = p\pi$, p et helt tal. Residuerne



Skitse 7.15.1. Poler i fold af π.

$$g(z) = f(z)(z-p\pi) = \frac{z-p\pi}{\sin z - \sin p\pi}$$

$$R(f, p\pi) = \frac{1}{\cos p\pi} = (-1)^p$$

Eksempel 7.16. Hvis

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

hvor $g(a) \neq 0$ og h har et simpelt nulpunkt i a, så har f en simpel pol i a og

$$R(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

Hvis g har nulpunkt af orden p og h har nulpunkt af orden $p+1$ i a så har f en simpel pol i a og

$$R(f, a) = (p+1)\frac{g^{(p)}(a)}{h^{(p+1)}(a)}$$

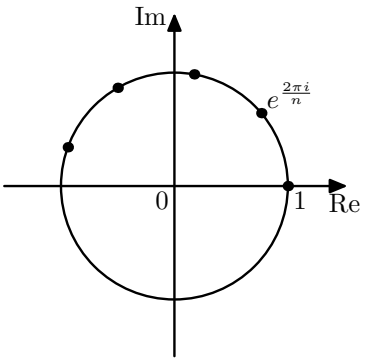
Øvelse 7.17. Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z^n - 1}$$

har poler af orden 1 for $z = e^{\frac{2p\pi i}{n}}$, $p = 0, \ldots, n-1$. Residuerne beregnes

$$h(z) = z^n - 1, \ h'(z) = nz^{n-1}$$

$$R(f, e^{\frac{2p\pi i}{n}}) = \frac{1}{ne^{\frac{2p\pi(n-1)i}{n}}} = \frac{1}{n}e^{\frac{2p\pi i}{n}}$$



Skitse 7.17.1. Polernes placering.

Eksempel 7.18. Antag

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

hvor g har nulpunkt af orden p og h har nulpunkt af orden q i a. Hvis $p \geq q$ så har f nulpunkt af orden $p-q$ i a. Hvis $p < q$ så har f en pol af orden $k = q - p$ i a. Lad

$$f(z) = \sum_n a_n(z-a)^n,\ g(z) = \sum_n b_n(z-a)^n,\ h(z) = \sum_n c_n(z-a)^n$$

I pol tilfældet er

$$R(f,a) = \frac{1}{{c_q}^k} \begin{vmatrix} c_q & 0 & \dots & 0 & b_p \\ c_{q+1} & c_q & \dots & 0 & b_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{q+k-2} & c_{q+k-3} & \dots & c_q & b_{p+k-2} \\ c_{q+k-1} & c_{q+k-2} & \dots & c_{q+1} & b_{p+k-1} \end{vmatrix}$$

Dette følger af identiteten, $a = 0$,

$$(a_{-k} + a_{-k+1}z + \dots + a_{-1}z^k + \dots)(c_q + c_{q+1}z + \dots) = b_p + b_{p+1}z + \dots$$

udtrykt ved matrixmultiplikation og Cramers formler.

Øvelse 7.19. Taylorudvikling

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin^3 z = (\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots)^3 = z^3 - \frac{z^5}{2} + \cdots$$

giver funktionen

$$f(z) = \frac{\cos z}{\sin^3 z}$$

en pol af orden 3 i $z = 0$. Residuet beregnes

$$R(f,0) = \frac{1}{1^3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

Opgaver

Opgave 7.1. Bestem arten af de singulære punkter for funktionerne

(1) $\frac{1}{(z^2-1)^2}$.
(2) $\frac{e^z-1}{z^2}$.
(3) $\sin\frac{1}{z}$.
(4) $\tan z$.

Opgave 7.2. Find poler og residuer af funktionerne

(1) $\frac{z}{z+2}$.
(2) $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3}$.
(3) $\frac{1}{z^3-1}$.

(4) $\frac{1}{z^3+a^3}$.
(5) $\frac{z}{e^z-1}$.
(6) $\frac{\sin z}{z^2}$.

Opgave 7.3. Bestem poler og residuer af funktion

$$\frac{1}{z^n+1}$$

Opgave 7.4. Bestem poler og residuer af funktion

$$\cot z$$

Gør rede for, at

$$\cot z - \frac{1}{z}$$

er holomorf i 0.

Opgave 7.5. Hvis f har isoleret singularitet i a, så har f' isoleret singularitet i a og

$$R(f', a) = 0$$

Opgave 7.6. Vis formlen for residuet af sammensat funktion $g \circ f$

$$R((g \circ f)f', c) = R(g, f(c))$$

Opgave 7.7. Hvis $f(z)$ og $f(\frac{1}{z})$ er meromorfe i $\mathbb{C}$, så er $f(z)$ rational,

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

for polynomier $P(z), Q(z)$.

Opgave 7.8. Antag $f(z)$ er meromorf i $\mathbb{C}$ med endelig mange poler. For R stor er

$$\oint_{|z|=R} f(z)\,dz = \oint_{|z|=\frac{1}{R}} \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})\,dz$$

Altså

$$R(\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}), 0) = \oint_{|z|=R} f(z)\,dz$$

Opgave 7.9. Beregn residuet af

$$f(z) = \frac{e^z}{\sin^3 z}$$

i $z = 0$.

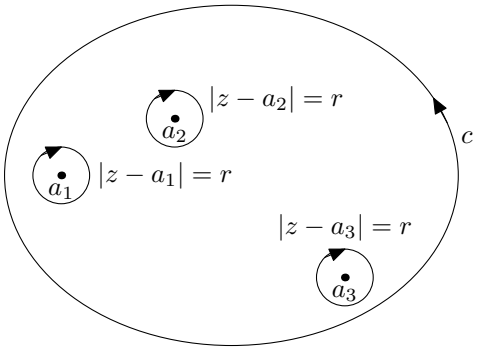
8. Residuesætningen

Der gives en meget praktisk fortolkning af Cauchys sætninger. Som en anvendelse tælles nulpunkter og poler for en meromorf funktion. Mange flere anvendelser i næste afsnit.

Hovedsætning 8.1 (Residuesætningen)**.** *Lad f være meromorf i et område $\mathcal{D}$ og lad K være en indhegning i $\mathcal{D}$ med rand $c_1, \ldots, c_m$, der ikke går gennem polerne for f. Da er*

$$\sum_j \oint_{c_j} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} R(f, a_k)$$

hvor $a_1, \ldots, a_n$ er de endelig mange poler indenfor indhegningen.



Skitse 8.1.1. Indhegningen uden om polerne.

Bevis. Af tegningen fremgår

$$\oint_c f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{|z-a_k|=r} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} R(f, a_k)$$

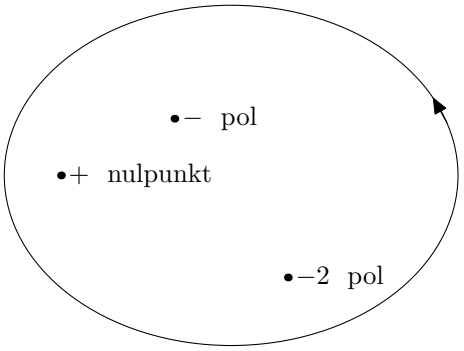
hvor $|z - a_k| = r$ er en tilpas lille cirkel med centrum i a_k.

Sætning 8.2 (argumentprincippet)**.** *Lad f være meromorf i et område $\mathcal{D}$ og lad K være en indhegning i $\mathcal{D}$, hvis rand $c_1, \ldots, c_m$ ikke går gennem poler og nulpunkter for f. Da er*

$$\sum_j \oint_{c_j} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i(N - P)$$

hvor N henhv. P er antallet talt med orden af nulpunkter henhv. poler indenfor indhegningen.

Bevis. Residuesætningen.



Skitse 8.2.1. Nulpunkter og poler med fortegn og multipliciteter.

Eksempel 8.3. Lad f, g være holomorfe i et område $\mathcal{D}$ og lad K være en indhegning i $\mathcal{D}$, hvis rand $c_1, \ldots, c_m$ ikke går gennem poler og nulpunkter. Da er

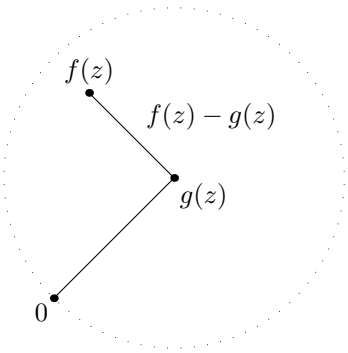
$$\sum_j \oint_{c_j} \frac{f'(z)}{f(z)} g(z)\, dz = \sum_i n_i g(a_i)$$

hvor a_i er nulpunkt med multiplicitet n_i for f indenfor indhegningen.

Eksempel 8.4 (Rouchés sætning)**.** Lad f, g være holomorfe i et område $\mathcal{D}$ og lad K være en indhegning i $\mathcal{D}$ med rand c og antag

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \ z \in c$$

Da har f og g samme antal nulpunkter indenfor indhegningen.
Dette fås af argumentprincippet for funktionen $\frac{f(z)}{g(z)}$.



Skitse 8.4.1. Mand-kortsnor-hund samme antal gange om lygtepæl.

Øvelse 8.5. Betragt polynomiet

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

Inden for cirklen med centrum i 0 og radius $R > 1 + |a_1| + \cdots + |a_n|$ har $p(z)$ netop n rødder.

Sætning 8.6 (Åben afbildning)**.** *Hvis f er holomorf og ikke konstant i et område $\mathcal{D}$, så er billedmængden $f(\mathcal{D})$ et område, dvs. åben og sammenhængende.*

Bevis. Åben: Antag $f(0) = 0$, $\epsilon > 0$ og $f(z), f'(z) \neq 0$ for $0 < |z| \leq \epsilon$. Lad $|w| < \min_{|z|=\epsilon} |f(z)|$. Ved argumentprincippet og Rouchés sætning fås

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\epsilon} \tfrac{f'(z)}{f(z)} dz = \tfrac{1}{2\pi i} \oint_{f(|z|=\epsilon)} \tfrac{1}{z} dz \\ &= \tfrac{1}{2\pi i} \oint_{f(|z|=\epsilon)} \tfrac{1}{z-w} dz = \tfrac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\epsilon} \tfrac{f'(z)}{f(z)-w} dz \end{aligned}$$

derfor findes z så $f(z) = w$.

Opgaver

Opgave 8.1. Antag $f(z)$ og $f(\frac{1}{z})$ er meromorfe i $\mathbb{C}$. Så er

$$R(\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}), 0) = \sum_j R(f(z), a_j)$$

hvor $a_1, \ldots, a_n$ er polerne for $f(z)$.

Opgave 8.2. Hvis f er holomorf og injektiv i hele $\mathbb{C}$, så er f et 1. grads polynomium.
(hjælp: (1) $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ har en pol i $z = 0$. (2) f er et polynomium.)

Opgave 8.3. Hvis f er holomorf med $f'(a) \neq 0$ findes $\epsilon > 0$ så f er injektiv for $|z - a| \leq \epsilon$. Den inverse funktion er givet ved

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\epsilon} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz$$

med afledt

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\epsilon} \frac{1}{f(z) - w} dz$$

Opgave 8.4. Hvis f har en pol i a, så har f' en pol i a med

$$R(f', a) = 0$$

Opgave 8.5. Antag f holomorf med et nulpunkt af orden n i a. Ligningen

$$f(x) = b$$

har netop n løsninger tæt ved a for b tæt ved 0.

Opgave 8.6. Lad f, g være meromorfe i et område $\mathcal{D}$ og antag

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

på randen c af indhegning K i $\mathcal{D}$, der ikke går gennem poler og nulpunkter. Da er

$$N_f - P_f = N_g - P_g$$

hvor N henhv. P er antallet talt med orden af nulpunkter henhv. poler indenfor indhegningen.

Opgave 8.7. Lad $|a| > e$ og vis at

$$f(z) = e^z + az^n$$

har netop n forskellige nulpunkter i cirkelskiven $|z| < 1$.

Opgave 8.8. Lad $a \in]1, \infty[$ og vis, at

$$f(z) = a - z - e^z$$

har netop 1 nulpunkt i øvre halvplan $\operatorname{Im} z \geq 0$, og at dette er reelt.

Opgave 8.9. Lad c_R være randen af rektanglet med hjørner

$$-Ri, \pi - Ri, \pi + Ri, Ri$$

gennemløbet i positiv retning. Givet $R > 0$ og k et positivt helt tal.

$$2\pi i R(\tan^k(z), \frac{\pi}{2}) = \oint_{c_R} \tan^k(z)\, dz \tag{1}$$

$$\int_{[\pi - Ri, \pi + Ri]} \tan^k(z)\, dz + \int_{[Ri, -Ri]} \tan^k(z)\, dz = 0 \tag{2}$$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{[-Ri, \pi - Ri]} \tan^k(z)\, dz = \pi(-i)^k \tag{3}$$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{[\pi + Ri, Ri]} \tan^k(z)\, dz = -\pi i^k \tag{4}$$

$$R(\tan^k(z), \frac{\pi}{2}) = \frac{i^{k+1} + (-i)^{k+1}}{2} \tag{5}$$

$$R(\tan^{2k}(z), \frac{\pi}{2}) = 0 \ , R(\tan^{2k-1}(z), \frac{\pi}{2}) = (-1)^k \tag{6}$$

9. Integraler, summer og produkter

Der gives eksempler på fem typer af bestemte integraler som er populære at udregne ved residuesætningen. Yderligere nogle vigtige integraler beregnes. Sum af række, partialbrøkfremstilling og produktudvikling behandles.

Eksempel 9.1 (Type 1)**.**

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$$

hvor R er et rationalt udtryk i to variable.
For eksempel

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\cos t}\, dt = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \ -1 < a < 1$$

Ved Eulers formler og substitution

$$\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \ z = e^{it}, \ dz = ie^{it}dt$$

fås

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\cos t}\, dt = \oint_{|z|=1} \frac{-2i}{az^2 + 2z + a}\, dz$$

Funktionen

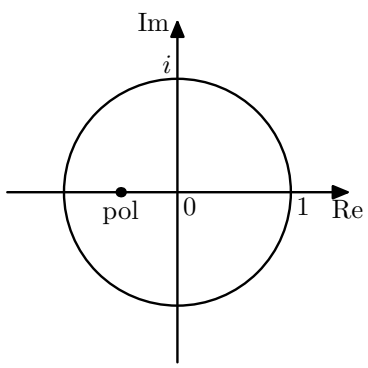
$$f(z) = \frac{-2i}{az^2 + 2z + a}$$

har en simpel pol i $z = \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}$ indenfor enhedscirklen og

$$R(f, \frac{-1+\sqrt{1-a^2}}{a}) = \frac{-i}{\sqrt{1-a^2}}$$

Ved residuesætningen

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a\cos t}\, dt = 2\pi i \frac{-i}{\sqrt{1-a^2}}$$



Skitse 9.1.1. Pol på den reelle akse.

Øvelse 9.2. Beregn

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{5+4\cos t}\,dt$$

Der omskrives ved Eulers formler

$$\cos t = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\ \sin t = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}),\ z=e^{it},\ dz = ie^{it}dt$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{5+4\cos t}\,dt = \oint_{|z|=1} \frac{z^2-1}{2z(2z^2+5z+2)}\,dz$$

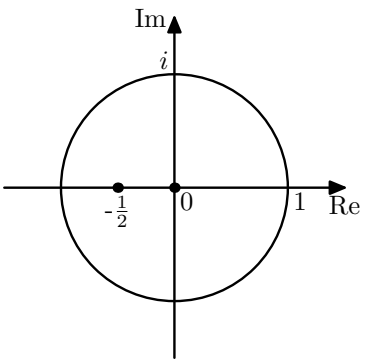
$$f(z) = \frac{z^2-1}{2z(2z^2+5z+2)}$$

har simple poler i $z=-\frac{1}{2}, 0$ indenfor enhedscirklen og

$$R(f,-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4},\ R(f,0) = -\frac{1}{4}$$

Dette giver

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{5+4\cos t}\,dt = 2\pi i(\frac{1}{4}+(-\frac{1}{4})) = 0$$



Skitse 9.2.1. To poler.

Eksempel 9.3 (Type 2)**.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

hvor P, Q er polynomier og graden af Q er mindst 2 højere end graden af P. For eksempel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}dx = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

Lad

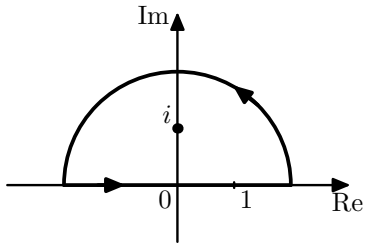
$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$$

og lad c_R være halvcirklen med centrum i 0 og radius $R>1$ i øvre halvplan gennemløbet i positiv retning. Sammen med intervallet $[-R,R]$ udgør c_R

randen af en indhegning indenfor hvilken f har en pol af orden $n+1$ i $z=i$ med residue

$$R(f,i) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(z+i)^{-n-1}|_{z=i}$$

$$R(f,i) = (-1)^n \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{n!}\frac{1}{(2i)^{2n+1}}$$



Skitse 9.3.1. En pol i øvre halvplan.

Ved residuesætningen

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{c_R} f(z)\,dz = 2\pi i R(f,i)$$

Af vurderingen for $|z| = R$

$$|z^2+1| \geq R^2 - 1$$

fås

$$\left|\int_{c_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^{n+1}}$$

Formlen følger for $R \to \infty$.

Øvelse 9.4. Beregn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

Lad

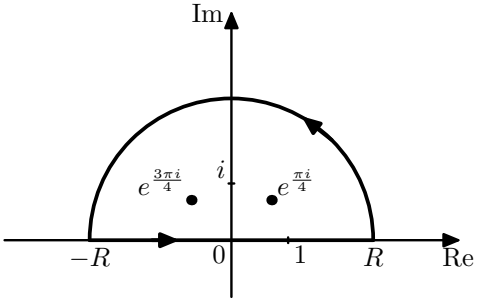
$$f(z) = \frac{1}{z^4+1}$$

og lad c_R være halvcirklen med centrum i 0 og radius $R > 1$ i øvre halvplan gennemløbet i positiv retning. Sammen med intervallet $[-R,R]$ udgør c_R randen af en indhegning c indenfor hvilken f har simple poler i $z = e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{3\pi i}{4}}$ med residuer

$$R(f, e^{\frac{\pi i}{4}}) = \frac{-1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}},\ R(f, e^{\frac{3\pi i}{4}}) = \frac{-1}{4}e^{\frac{3\pi i}{4}}$$

Ved residuesætningen

$$\oint_c \frac{1}{z^4+1}\,dz = 2\pi i(\frac{-1}{4}e^{\frac{\pi i}{4}} + \frac{-1}{4}e^{\frac{3\pi i}{4}}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$



Skitse 9.4.1. To poler og integrationskurve.

Altså

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^4} dx + \int_{c_R} \frac{1}{z^4+1} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Af vurderingen for $|z| = R$

$$|z^4 + 1| \geq |z|^4 - 1 = R^4 - 1$$

følger

$$\left| \int_{c_R} \frac{1}{z^4+1} dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^4 - 1}$$

For $R \to \infty$ fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Eksempel 9.5 (Type 3)**.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ix}\, dx$$

hvor g er holomorf og $|zg(z)| \to 0,\ |z| \to \infty$.
Beregn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\, dx$$

Lad

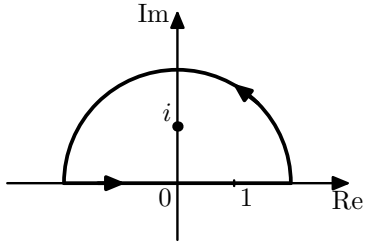
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$$

og lad c_R være halvcirklen med centrum i 0 og radius $R > 1$ i øvre halvplan gennemløbet i positiv retning. Sammen med intervallet $[-R, R]$ udgør c_R randen af en indhegning c indenfor hvilken f har en simpel pol i $z = i$ med residue

$$R(f, i) = \frac{e^{-1}}{2i}$$

Ved residuesætningen

$$\oint_c \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$



Skitse 9.5.1. Pol og randkurve.

Altså

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx + \int_{c_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz = \frac{\pi}{e}$$

Af vurderingen for $0 \le t \le \pi$

$$|e^{iRe^{it}}| \le 1$$

og

$$|z^2+1| \ge R^2 - 1$$

følger

$$\left| \int_{c_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz \right| \le \frac{\pi R}{R^2-1}$$

For $R \to \infty$ fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{e}$$

og dermed også

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{e}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx = 0$$

Eksempel 9.6 (Type 4)**.**

$$\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)x^{\alpha}}\, dx$$

hvor $0 < \alpha < 1$ og P, Q er polynomier med graden af Q mindst 1 højere end graden af P.
For eksempel

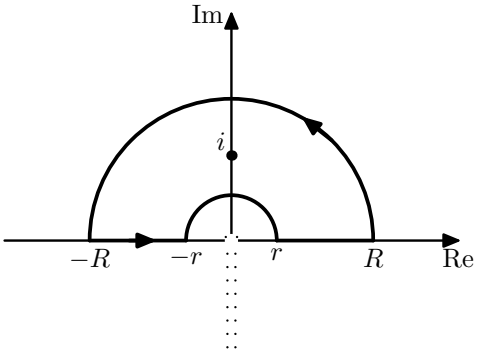
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}},\ -1 < \alpha < 1$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(1+x)}\, dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi},\ 0 < \alpha < 1$$

Lad

$$f(z) = \frac{e^{-\alpha \log z}}{z^2+1}$$

hvor $\log z$ er bestemt i $\mathbb{C}$ fraregnet den negative imaginære akse. Lad c_R være halvcirklen med centrum i 0 og radius $R > 1$ i øvre halvplan gennemløbet i positiv retning og lad c_r være halvcirklen med centrum i 0 og radius $r < 1$ i øvre halvplan gennemløbet i negativ retning. Sammen med intervallerne $[-R, -r], [r, R]$ udgør disse randen c af en indhegning i området for log.



Skitse 9.6.1. Indhegning og pol.

Indenfor c har f en simpel pol i $z = i$ med residue

$$R(f, i) = \frac{e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}}}{2i}$$

Ved residuesætningen

$$\oint_c \frac{e^{-\alpha \log z}}{z^2 + 1}\, dz = \pi e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}}$$

Af vurderingerne for $|z| = r, R$

$$\left| \int_{c_r} f(z)dz \right| \leq \frac{\pi r}{r^\alpha (1 - r^2)}, \quad \left| \int_{c_R} f(z)dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^\alpha (R^2 - 1)}$$

følger for $r \to 0, R \to \infty$

$$(e^{-\alpha\pi i} + 1) \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha (1 + x^2)} dx = \pi e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}}$$

og heraf første formel. Anden formel fås ved variabel skift $x \to \sqrt{x}$.

Øvelse 9.7. Beregn

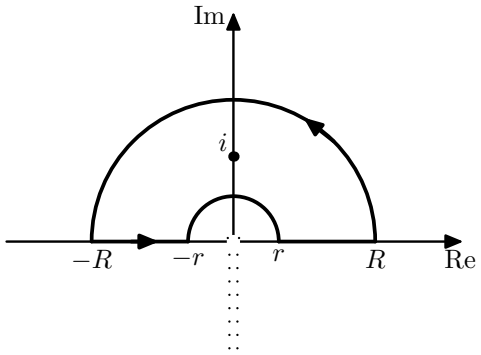
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2 + 1)}\, dx$$

Lad

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\log z}}{z^2 + 1}$$

hvor $\log z$ er bestemt i $\mathbb{C}$ fraregnet den negative imaginære akse. Lad c_R være halvcirklen med centrum i 0 og radius $R > 1$ i øvre halvplan gennemløbet i positiv retning og lad c_r være halvcirklen med centrum i 0 og radius $r < 1$

i øvre halvplan gennemløbet i negativ retning. Sammen med intervallerne $[-R,-r],[r,R]$ udgør disse randen c af en indhegning i området for log.



Skitse 9.7.1. Pol og indhegning.

Indenfor c har f en simpel pol i $z=i$ med residue

$$R(f,i)=\frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{2i}$$

Ved residuesætningen

$$\oint_c \frac{e^{-\frac{1}{2}\log z}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i\frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{2i} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-i)$$

Af vurderingerne for $|z|=r,R$

$$\left|\int_{c_r} f(z)dz\right| \le \frac{\pi r}{\sqrt{r}(1-r^2)},\quad \left|\int_{c_R} f(z)dz\right| \le \frac{\pi R}{\sqrt{R}(R^2-1)}$$

følger

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{-i}{\sqrt{-x}(1+x^2)}dx + \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-i)$$

Heraf for realdelen

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Eksempel 9.8 (Type 5)**.**

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\log x\,dx$$

hvor P,Q er polynomier og graden af Q er mindst 2 højere end graden af P. Beregn

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}\,dx$$

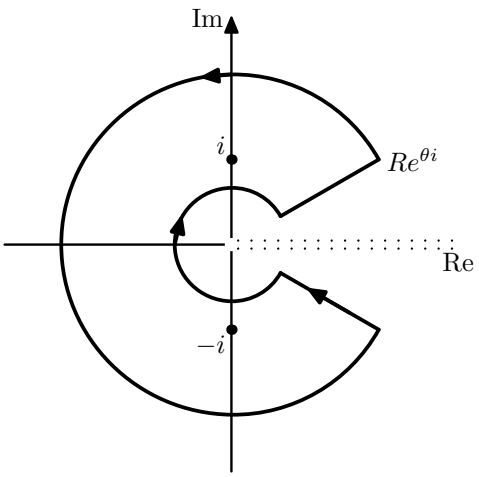
Lad

$$f(z)=\frac{\log^2 z}{z^2+1}$$

hvor $\log z$ er bestemt i $\mathbb{C}$ fraregnet den positive reelle akse. Lad c_R være cirkeludsnit

$$z_R(t) = Re^{it},\ -\theta \le t \le \theta,\ R > 1,\ 0 < \theta < 1$$

gennemløbet i positiv retning og lad c_r være tilsvarende cirkeludsnit med radius $r < 1$ gennemløbet i negativ retning. Sammen med linjestykkerne $[re^{i\theta}, Re^{i\theta}]$, $[Re^{-i\theta}, re^{-i\theta}]$ udgør disse randen c af en indhegning i området for log.



Skitse 9.8.1. En noget kompliceret indhegning med to poler.

Indenfor c har f simple poler i $z = \pm i$ med residuer

$$R(f, i) = \frac{(\frac{\pi i}{2})^2}{2i}$$

$$R(f, -i) = \frac{(\frac{3\pi i}{2})^2}{-2i}$$

Ved residuesætningen

$$\oint_c \frac{\log^2 z}{z^2+1}\,dz = 2\pi i\left(\frac{-\frac{\pi^2}{4}}{2i} + \frac{-\frac{9\pi^2}{4}}{-2i}\right) = 2\pi^3$$

Af vurderingerne for $|z| = r, R$

$$\left|\int_{c_r} f(z)dz\right| \le \frac{2\pi r(\log r + 2\pi)^2}{1-r^2},\ \left|\int_{c_R} f(z)dz\right| \le \frac{2\pi R(\log R + 2\pi)^2}{R^2-1}$$

følger, $R \to \infty,\ r \to 0,\ \theta \to 0,$

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{1+x^2}dx - \int_0^\infty \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{1+x^2}dx = 2\pi^3$$

Heraf imaginærdelen

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}dx = 0$$

og realdelen

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

Eksempel 9.9 (Gauss' integral)**.**

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

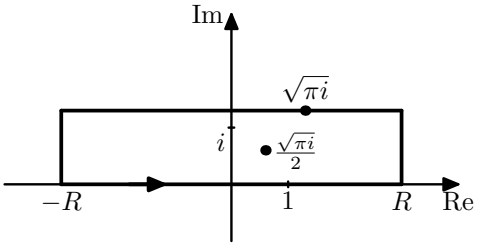
Lad

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2\sqrt{\pi i}z}},\ \sqrt{\pi i} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)$$

Lad c være randen af rektanglet med hjørner

$$R, R+\sqrt{\frac{\pi}{2}}i, -R+\sqrt{\frac{\pi}{2}}i, -R$$

gennemløbet i positiv retning.



Skitse 9.9.1. En rigtig snu fremgangsmåde.

Indenfor c har f en simpel pol i $z = \frac{\sqrt{\pi i}}{2}$ med residue

$$R(f, \frac{\sqrt{\pi i}}{2}) = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}}$$

Ved residuesætningen

$$\oint_c f(z)\,dz = \sqrt{\pi}$$

Af vurderingerne for $\operatorname{Re} z = \pm R$ og $R >> 0$

$$\left|\int_{[-R,-R+\sqrt{\frac{\pi}{2}}i]} f(z)dz\right| \le \frac{e^{-R^2+\sqrt{\frac{\pi}{2}}}}{e^{\sqrt{2\pi}R}-1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left|\int_{[R,R+\sqrt{\frac{\pi}{2}}i]} f(z)dz\right| \le \frac{e^{-R^2+\sqrt{\frac{\pi}{2}}}}{1-e^{-\sqrt{2\pi}R+\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

følger, $R \to \infty$,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-x^2}}{1+e^{-2\sqrt{\pi i}x}}dx - \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-(x+i\sqrt{\pi i})^2}}{1+e^{-2\sqrt{\pi i}(x+i\sqrt{\pi i})}}dx = \sqrt{\pi}$$

Differensen af integranter er snedigt nok e^{-x^2}, så

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Eksempel 9.10 (Fresnels integraler)**.**

$$\int_0^{\infty} \cos x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

$$\int_0^{\infty} \sin x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

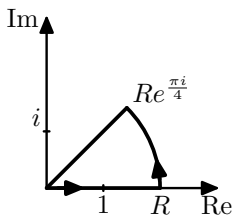
Lad

$$f(z) = e^{iz^2}$$

og lad c_R være cirkeludsnit

$$z(t) = Re^{it},\ 0 \leq\ t \leq \frac{\pi}{4}$$

gennemløbet i positiv retning. Sammen med linjestykkerne $[0, R]$, $[Re^{\frac{\pi i}{4}}, 0]$ udgøres randen c af en indhegning i $\mathbb{C}$.



Skitse 9.10.1. Lagkagestykke uden poler.

f har ingen poler så

$$\oint_c f(z)\,dz = 0$$

Af vurderingen

$$\left|\int_{c_R} e^{iz^2}\,dz\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2 t} dt$$

følger, $R \to \infty$,

$$\int_0^{\infty} (\cos x^2 + i \sin x^2)\,dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{\frac{\pi i}{4}}\,dx$$

Realdel og imaginærdel giver sammen med Gauss' integral resultatet.

Eksempel 9.11 (Eulers integral)**.** For $0 < m < n$ er

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{m\pi}{n}}$$

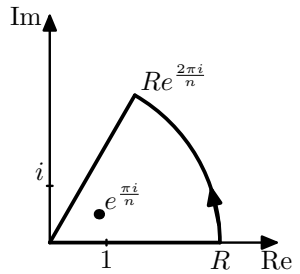
Lad

$$f(z) = \frac{z^{m-1}}{z^n + 1}$$

og lad c_R være cirkeludsnit

$$z(t) = Re^{it},\ 0 \leq\ t \leq \frac{2\pi}{n}$$

gennemløbet i positiv retning. Sammen med linjestykkerne $[0, R],\ [Re^{\frac{2\pi i}{n}}, 0]$ udgøres randen c af en indhegning i $\mathbb{C}$.



Skitse 9.11.1. Lagkagestykke med en pol.

f har netop en simpel pol $z = e^{\frac{\pi i}{n}}$ indenfor c. Residuet er

$$R(f, e^{\frac{\pi i}{n}}) = -\frac{e^{\frac{m\pi i}{n}}}{n}$$

så

$$\oint_c f(z)\, dz = -\frac{2\pi i}{n} e^{\frac{m\pi i}{n}}$$

Det følger, $R \to \infty$,

$$(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}) \int_0^\infty \frac{x^m}{1 + x^n}\, dx = -\frac{2\pi i}{n} e^{\frac{m\pi i}{n}}$$

og heraf formlen.

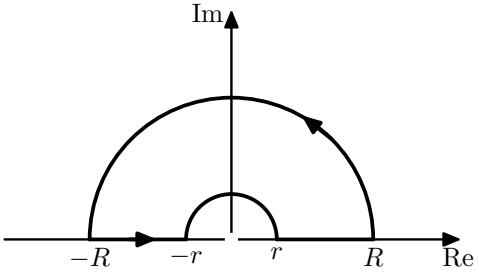
Eksempel 9.12 (sinus integral)**.**

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Lad

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

Lad c_R være halvcirklen med centrum i 0 og radius $R > 1$ i øvre halvplan gennemløbet i positiv retning og lad c_r være halvcirklen med centrum i 0 og radius $r < 1$ i øvre halvplan gennemløbet i negativ retning. Sammen med intervallerne $[-R, -r], [r, R]$ udgør disse randen c af en indhegning i området $\mathbb{C} - \{0\}$.



Skitse 9.12.1. Indhegning, men ingen poler.

f er holomorf i $\mathbb{C} - \{0\}$, så

$$\oint_c f(z)\,dz = 0$$

Ved grænseovergangen $r \to 0,\ R \to \infty$ følger

$$\int_{c_r} f(z)dz \to -\pi i$$

$$\int_{c_R} f(z)dz \to 0$$

Resultatet følger af

$$\int_{[-R,-r]} f(z)dz + \int_{[r,R]} f(z)dz = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$$

Eksempel 9.13 (cotangens integral)**.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x\,dx = \frac{\pi}{2} \log 2$$

Lad

$$f(z) = z(\cot z + 1)$$

Lad c være randen af rektanglet med hjørner

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + Ri, -\frac{\pi}{2} + Ri, -\frac{\pi}{2}$$

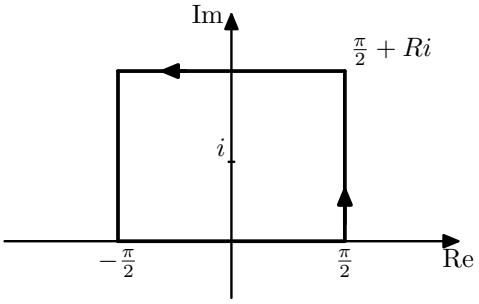
gennemløbet i positiv retning. Dette er en indhegning i et område, hvor f er holomorf, så

$$\oint_c f(z)\,dz = 0$$

Ved grænseovergangen $R \to \infty$ følger

$$\int_{[-\frac{\pi}{2}+Ri, \frac{\pi}{2}+Ri]} f(z)dz \to 0$$

$$\int_{[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+Ri]} f(z)\,dz - \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+Ri]} f(z)dz \to -\pi \log 2$$



Skitse 9.13.1. Rektangel uden poler.

I alt

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cot x \, dx = \pi \log 2$$

giver resultatet

Eksempel 9.14 (Bernoulli tal)**.** Bernoulli tallene er defineret ved Taylorrækken

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2}z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$

idet $\frac{z}{e^z-1} + \frac{1}{2}z$ er en lige funktion. Konvergensradius er 2π. Fra exponentialrækken fås rekursionsformlen

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

som giver

$$B_0 = 1, \; B_1 = -\frac{1}{2}, \; B_2 = \frac{1}{6}, \; B_4 = -\frac{1}{30}, \; B_6 = -\frac{1}{42}$$

Ved Eulers formler fås Taylorrækker

$$z \cot z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k}{(2k)!} B_{2k} z^{2k}$$

$$\tan z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{4^k(4^k - 1)}{(2k)!} B_{2k} z^{2k-1}$$

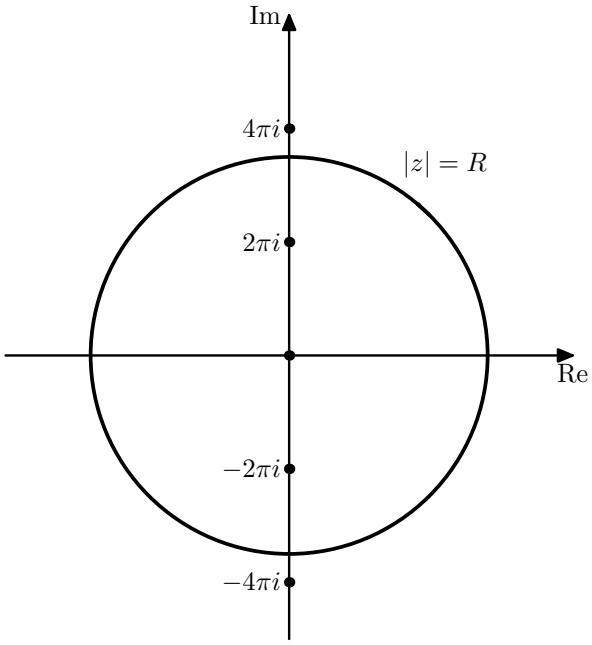
$$\frac{z}{\sin z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{4^k - 2}{(2k)!} B_{2k} z^{2k}$$

Funktionen

$$g_n(z) = \frac{1}{z^{2n}(e^z - 1)}$$

har en pol i $z = 0$ af orden $2n + 1$ og fra potensrækken residuet

$$R(g_n, 0) = \frac{B_{2n}}{(2n)!}$$



Skitse 9.14.1. Poler i imaginær fold af 2π.

De øvrige poler i $z = 2k\pi i$ er simple med residue

$$R(g_n, 2k\pi i) = \frac{1}{(2k\pi i)^{2n}}$$

Fra residuesætningen følger

$$0 = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} g_n(z)\, dz = \frac{B_{2n}}{(2n)!} + \sum_{k\neq 0} \frac{1}{(2k\pi i)^{2n}}$$

Heraf

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n-1} B_{2n}}{(2n)!} (2\pi)^{2n}$$

For eksempel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

Eksempel 9.15 (Partialbrøkfremstilling)**.**

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k\neq 0} \frac{1}{z-k} + \frac{1}{k}$$

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}$$

$$\pi \tan \pi z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{(\frac{2k-1}{2})^2 - z^2}$$

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2z}{z^2 - k^2}$$

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{k} \frac{(-1)^k}{z+k}$$

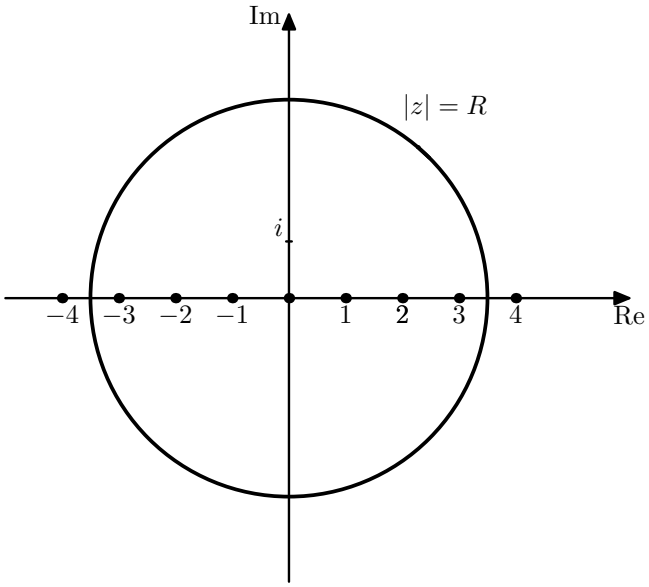
$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+\frac{1}{2})}{(k+\frac{1}{2})^2 - z^2}$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{k} \frac{1}{(z+k)^2}$$

Funktionen

$$f(w) = \frac{\pi}{w} \frac{\cot \pi w}{w - z}$$

er meromorf med poler i hele tal, $w = k$ og i $w = z$.



Skitse 9.15.1. Poler i hele tal.

Residuerne beregnes

$$R(f,k) = \frac{1}{k(k-z)}, \ k \neq 0$$

$$R(f,0) = -\frac{1}{z^2}$$

$$R(f,z) = \frac{\pi}{z} \cot \pi z$$

Fra residuesætningen følger

$$0 = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=R} f(w)\,dw = \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k(k-z)} - \frac{1}{z^2} + \frac{\pi}{z}\cot \pi z$$

Heraf partialbrøkfremstillingen

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k\neq 0} \frac{1}{z-k} + \frac{1}{k}$$

eller

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2}$$

Ved Eulers formler følger de resterende fremstillinger.

Eksempel 9.16 (Produktudvikling)**.**

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{k^2})$$

$$\cos \pi z = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2})$$

Da

$$\frac{d}{dz} \log \sin z = \cot z$$

fås ved integration af rækken

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2}$$

produktudviklingen

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{k^2})$$

Eksempel 9.17 (Gauss sum)**.**

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i k^2}{n}} = \sqrt{n}\,\frac{1+i^{-n}}{1-i}$$

Betragt

$$f(z) = \frac{2e^{\frac{2\pi i z^2}{n}}}{e^{2\pi i z}-1}$$

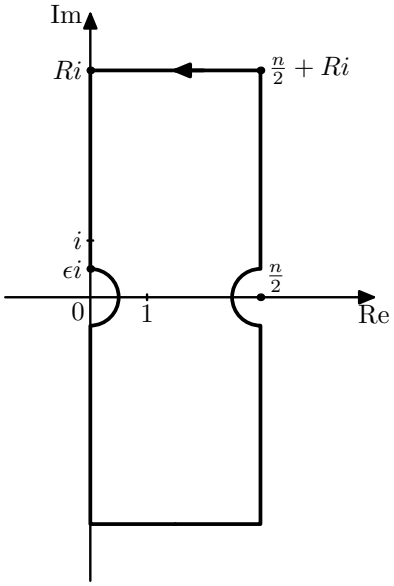
med simple poler i hele tal $z = k$ og residuer

$$R(f,k) = \frac{2e^{\frac{2\pi i k^2}{n}}}{2\pi i}$$

Lad c være randen af det om 0 og $\frac{n}{2}$ indskrænkede rektangel med hjørner

$$-Ri, \frac{n}{2} - Ri, \frac{n}{2} + Ri, Ri$$

gennemløbet i positiv retning.



Skitse 9.17.1. Den vanskeligste fremgangsmåde i disse noter.

Ved residuesætningen fås

$$\oint_c f(z)\,dz = 2 \sum_{0<k<\frac{n}{2}} e^{\frac{2\pi i k^2}{n}}$$

Af de 8 delintegraler er der efter $R \to \infty, \epsilon \to 0$ trivielle bidrag fra de vandrette linjestykker. Indskrænkningerne giver

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|z|=\epsilon} f(z)dz = -1$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|z-\frac{n}{2}|=\epsilon} f(z)dz = \begin{cases} e^{\frac{2\pi i (\frac{n}{2})^2}{n}} & , n \text{ lige} \\ 0 & , n \text{ ulige} \end{cases}$$

De 4 lodrette linjestykker giver samlet

$$2i(1 + i^{-n}) \int_0^\infty e^{\frac{-2\pi i y^2}{n}} dy$$

I alt fås

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i k^2}{n}} = 2i(1 + i^{-n}) \int_0^\infty e^{\frac{-2\pi i y^2}{n}} dy$$

For $n = 1$ giver dette

$$1 = 2i(1-i)\int_0^\infty e^{-2\pi i y^2}\,dy$$

Summen for generelle n følger ved variabelskift.

Øvelse 9.18. Beregn Gauss sum direkte

$$\sum_{k=0}^{8} e^{\frac{2\pi i k^2}{9}} = \sqrt{9}\,\frac{1+i^{-9}}{1-i} = 3$$

Opgaver

Opgave 9.1. Beregn

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{2+\cos t}\,dt$$

Opgave 9.2. Beregn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4}\,dx$$

Opgave 9.3. Beregn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx$$

Opgave 9.4. Beregn

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$$

Opgave 9.5. Beregn

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+1}\,dx$$

Opgave 9.6. Vis følgende formler

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a+\cos t}dt = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}, \quad a > 1 \tag{1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2 t}dt = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}, \quad a > 0 \tag{2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \quad 0 < a < 1 \tag{3}$$

(4) $$\int_0^\infty \frac{1}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}, \quad a > 0$$

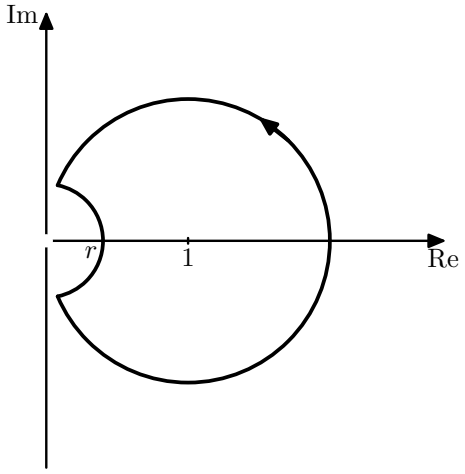
(5) $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)}dx = \frac{\pi(a+1)e^{-a}}{4}, \quad 0 < a < 1$$

(6) $$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}dx = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}, \quad n \geq 2$$

(7) $$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \quad 0 < a < 1$$

Opgave 9.7. For $0 < r < 1$ er en indhegning K bestemt ved

$$r \leq |z| \text{ og } |z-1| \leq 1$$



(1) Funktionen

$$f(z) = \frac{\operatorname{Log} z}{z-1}$$

er holomorf i et område om K.

(2) Beregn integralet

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Log}|1+e^{it}|\,dt$$

(3) Beregn integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log}\sin t\,dt = -\frac{\pi}{2}\operatorname{Log} 2$$

Opgave 9.8 (Vinteren 1999-2000 opgave 1)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}$$

Med c betegnes randkurven af halvcirklen

$$\{z \in \mathbb{C} |\, 0 \leq \arg z \leq \pi \text{ og } |z| \leq R\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning.
(1) Find polerne og bestem residuerne i disse punkter af funktionen f.
(2) Beregn værdien af integralet $\oint_c f(z)\,dz$ for $0 < R < 2$ og for $3 < R$.
(3) Lad c_R betegne cirkelbuen i randkurven c. Antag $3 < R$ og gør rede for uligheden

$$\left| \int_{c_R} f(z)\,dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 2\sqrt{5}R + 5}$$

(4) Beregn værdierne af integralerne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2 + 4t + 5}\,dt = \frac{\pi}{e}\cos(2) \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^2 + 4t + 5}\,dt = -\frac{\pi}{e}\sin(2)$$

Opgave 9.9 (Sommeren 2000 opgave 1)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{1}{3z^2 + 10iz - 3}$$

(1) Gør rede for, at funktionen f netop har poler i de to punkter $z = -3i$ og $z = -\frac{1}{3}i$. Bestem residuerne.
Med c_R betegnes randkurven af cirklen med radius $R > 0$

$$\{z \in \mathbb{C} |\, |z| \leq R\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning.
(2) Beregn værdierne af integralet $\oint_{c_R} f(z)\,dz$ for $R \neq \frac{1}{3}, 3$.
(3) Gør rede for formlen

$$2if(e^{it})e^{it} = \frac{1}{5 + 3\sin(t)}$$

(4) Beregn integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\sin(t)}\,dt$$

Opgave 9.10 (Vinteren 2000-01 opgave 1)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 9)^2}$$

Med c betegnes randkurven af halvcirklen

$$\{z \in \mathbb{C} |\, 0 \leq \arg z \leq \pi \text{ og } |z| \leq R\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning.
(1) Find polerne samt deres ordener og bestem residuerne i disse punkter af funktionen f.

(2) Beregn værdien af integralet

$$\oint_c f(z)\,dz$$

for $0 < R < 3$ og for $3 < R$.
(3) Lad c_R betegne cirkelbuen i randkurven c. Antag $3 < R$ og gør rede for uligheden

$$\left|\int_{c_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-9)^2}$$

(4) Beregn værdien af integralet

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx$$

Opgave 9.11 (Vinteren 2001-02 opgave 1)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{1}{z^2+2z}$$

Med c betegnes randkurven af cirklen

$$\{z \in \mathbb{C} |\, |z| \leq R\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning.
(1) Find polerne samt deres ordener og bestem residuerne i disse punkter for funktionen f.
(2) Beregn værdien af integralet

$$\oint_c f(z)\,dz$$

for $0 < R < 2$ og for $2 < R$.
(3) Gør rede for formlen

$$f(e^{it})e^{it} = \frac{2+\cos(t) - i\sin(t)}{5+4\cos(t)}$$

(4) Beregn værdien af integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos(t)}{5+4\cos(t)}dt$$

Opgave 9.12 (Sommeren 2002 opgave 1)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{e^z}{e^{2z}+1}$$

Med c betegnes randkurven af rektanglet, $R > 0$,

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, -R \leq \operatorname{Re} z \leq R,\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning.
(1) Funktionen f har netop en pol i rektanglet, $z = \frac{\pi}{2}i$. Bestem orden og residue.

(2) Beregn integralet $\oint_c f(z)\,dz$.
(3) Gør rede for følgende ulighed for $x \neq 0$

$$|f(x+yi)| \leq \frac{e^x}{|e^{2x}-1|}$$

(4) Beregn ved brug af ovenstående de reelle integraler

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh x}\,dx$$

Opgave 9.13 (Vinteren 2002-03 opgave 1)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2iz - 2}$$

Med c betegnes randkurven af halvcirklen, $R > 0$,

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \operatorname{Re} z,\ |z| \leq R\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning.
(1) Find polerne samt deres ordener og bestem residuerne i disse punkter for funktionen f.
(2) Beregn værdien af integralet

$$\oint_c f(z)\,dz$$

for $0 < R < 1$ og for $2 < R$.
(3) Lad c_R betegne cirkelbuen i randkurven c. Antag $3 < R$ og gør rede for uligheden

$$\left| \int_{c_R} f(z)\,dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 2R - 2}$$

(4) Beregn ved brug af ovenstående det reelle integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 2t + 2}\,dt$$

EKSAMENSOPGAVER

Opgave 1 (Sommeren 1992 opgave 3)**.** Lad c betegne randen af kvartcirkelskiven

$$\{z|0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2},\ |z| \leq R\}, \quad R > 1$$

med positiv gennemløbsretning.
a) Bestem

$$\oint_c \frac{1}{1+z^4} dz$$

b) Benyt dette til at bevise at integralet

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\, dx$$

eksisterer. Bestem integralets værdi.
Eventuelle vurderinger bedes gennemført.

Opgave 2 (Vinteren 1992-93 opgave 3)**.** Lad $f(z)$ betegne den komplekse funktion

$$f(z) = \frac{3z^3 - 1}{z(2z-1)(2z^2+3z-2)}$$

og lad c betegnes enhedscirklen $\{z|\ |z| = 1\}$ med positiv omløb.
Bestem kurveintegralet

$$\oint_c f(z)\, dz$$

Opgave 3 (Sommeren 1993 opgave 3)**.** Lad c betegne randen af halvcirklen

$$\{z \in \mathbb{C}|\ |z| \leq R,\ \arg z \in [0, \pi]\}$$

gennemløbet i positiv omløbsretning.
(a) Find værdien af kurveintegralet

$$\oint_c \frac{z^2+2}{(z^2+2z+2)(z^2-2z+2)} dz$$

(1) for $R = 1$
(2) for $R \geq 2$

(b) Vis på basis af (a), at integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}\, dx$$

er konvergent, og bestem integralets værdi. (Eventuelle vurderinger ønskes udført i detaljer).

Opgave 4 (Vinteren 1993-94 opgave 3)**.** Lad R være et positivt reelt tal og lad c_R betegne randen af området

$$\{z \in \mathbb{C}|0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2},\ |z| \leq R\}$$

med positiv omløbsretning.
(a) Bestem

$$\oint_{c_R} \frac{z}{1+z^4} dz$$

for $0 < R < 1$ og for $R > 1$.
(b) Benyt ovenstående til at bevise at integralet

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+x^4}\, dx$$

eksisterer. Bestem integralets værdi. (Eventuelle vurderinger bedes gennemført).

Opgave 5 (Sommeren 1994 opgave 3)**.** Lad $g(z)$ og $h(z)$ betegne de to komplekse funktioner

$$g(z) = \sin(z^2)$$
$$h(z) = z^3(z^2 - 4iz - 3)$$

(a) Bestem samtlige nulpunkter (incl. multiplicitet) for $g(z)$ og $h(z)$.
(b) Bestem

$$\oint_c f(z)dz$$

hvor $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ og c betegner cirklen med centrum $z = 0$ og radius 2, gennemløbet med positiv omløbsretning.

Opgave 6 (Vinteren 1994-95 opgave 3)**.** Lad R være et positivt reelt tal og lad c_R betegne randen af halvcirklen

$$\{z \in \mathbb{C} |\ 0 \leq \arg z \leq \pi,\ |z| \leq R\}$$

med positiv omløbsretning.
(a) Bestem

$$\oint_{c_R} \frac{z}{(z^2+1)(z^2-2z+2)} dz$$

for $0 < R < 1$ og for $R > 2$.
(b) Benyt ovenstående til at bevise at integralet

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+1)(x^2-2x+2)}\, dx$$

eksisterer. Bestem integralets værdi. (Eventuelle vurderinger bedes gennemført i detaljer).

Opgave 7 (Sommeren 1995 opgave 3)**.** Udregn følgende integraler
(a)

$$\oint_c \frac{1}{z-1} dz$$

hvor c er givet ved $c(t) = 1 + 2\sqrt{2}e^{it},\ -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

(b)

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$$

Opgave 8 (Vinteren 1995-96 opgave 3)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-\frac{\pi}{2})^2+1}$$

Lad c betegne randkurven af halvcirkelskiven

$$\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z \geq 0 \text{ og } |z| \leq R\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning. Vi antager yderligere, at $R \geq 3$.
(a) Vis, at $\oint_c f(z)dz = \pi e^{-1} i$.
(c) Find, ved brug af ovenstående, værdien af de reelle integraler

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x-\frac{\pi}{2})^2+1}\, dx \text{ og } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(x-\frac{\pi}{2})^2+1}\, dx$$

Alle detaljer i beregningen bedes gennemført.

Opgave 9 (Sommeren 1996 opgave 3)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$

hvor

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + (1-2i)z^2 + 4iz - 2i$$

(a) Vis, at $z = 1$ er et nulpunkt af orden 2 for polynomiet $p(z)$. Bestem herefter samtlige nulpunkter for $p(z)$.
Lad c_r betegne randkurven af halvcirkelskiven

$$\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ og } |z| \leq r\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning.
(b) Bestem $\oint_{c_r} f(z)dz$ for $r = \frac{1}{2}$ og for $r \geq 2$.
(c) Vis, ved brug af det foregående, at integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(it)\, dt$$

eksisterer (dvs. er konvergent) og bestem dets værdi. Alle detaljer i beregningen bedes gennemført.

Opgave 10 (Vinteren 1996-97 opgave 3)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9}$$

Lad c_r betegne randkurven af halvcirkelskiven

$$\{z \in \mathbb{C} | \arg z \in [0, \pi] \text{ og } |z| \leq R\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning.
(a) Bestem

$$\oint_{c_R} f(z)dz$$

for $R = \frac{1}{2}$, $R = 2$ og for $R \geq 4$.
(b) Vis, ved brug af det foregående, at det reelle integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$$

eksisterer (dvs. er konvergent) og bestem dets værdi. Alle udregninger - herunder evt. vurderinger - bedes gennemført i detaljer.

Opgave 11 (Sommeren 1997 opgave 3)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 2z + 2)^2}$$

Lad c_r betegne randkurven af halvcirkelskiven

$$\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z \geq 0 \text{ og } |z| \leq r\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning.
(a) Bestem

$$\oint_{c_r} f(z)dz$$

for $r = 1$ og for $r \geq 2$.
(b) Vis, ved brug af det foregående, at det reelle integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$$

eksisterer (dvs. er konvergent) og bestem dets værdi. Alle udregninger - herunder evt. vurderinger - bedes gennemført i detaljer.

Opgave 12 (Vinteren 1997-98 opgave 1)**.** Betragt funktionerne

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}, \qquad g(z) = \frac{\log z}{(z^2+1)^2}, \qquad h(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$$

hvor $\log(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$, $-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{2}$, betegner den gren af logaritmefunktionen der er analytisk i $\mathbb{C} - \{iy | y \in \mathbb{R} \text{ og } y \leq 0\}$, og som på den positive reelle akse stemmer overens med ln.
Lad k_r : betegne halvcirklen $z = re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, med radius $r > 1$ og centrum $z = 0$.
(a) Vis for $z \in k_r$ følgende tre uligheder

$$|f(z)| \leq \frac{1}{(r^2-1)^2}, \qquad |g(z)| \leq \frac{\ln(r) + \pi}{(r^2-1)^2}, \qquad |h(z)| \leq \frac{1}{(r^2-1)^2}$$

Lad $c_{\epsilon,r}$: betegne den lukkede kurve med positivt gennemløb, der er randen af mængden $\{z \in \mathbb{C} | \epsilon \leq |z| \leq r \text{ og } 0 \leq \arg(z) \leq \pi\}$, hvor ϵ og r er (faste) reelle tal, der opfylder $0 \leq \epsilon < 1 < r$.
(b) Vis, at

$$\oint_{c_{\epsilon,r}} f(z)dz = \frac{\pi}{2} \text{ for } 0 \leq \epsilon < 1 \text{ og } \oint_{c_{\epsilon,r}} g(z)dz = -\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4} \text{ for } 0 < \epsilon < 1$$

(c) Vis, ved brug af det foregående, at det reelle integral $\int_0^\infty f(t)\,dt$ eksisterer (dvs. er konvergent) og bestem dets værdi.

Opgave 13 (Sommeren 1998 opgave 1)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{e^{2iz} - 1}$$

(a) Bestem samtlige singulære punkter for f. Bestem deres type, og for poler bestem deres orden.
Med c betegnes randkurven af rektanglet

$$\{z \in \mathbb{C} || \operatorname{Re} z| \leq \frac{\pi}{2},\ |\operatorname{Im} z| \leq K\}$$

hvor $K > 0$. Det antages, at c gennemløbes med positiv omløbsretning.
(b) Beregn værdien af integralet $\oint_c f(z)dz$.
(c) Benyt det fundne resultat til at vise formlen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh t}\,dt = \pi$$

Alle udregninger samt alle vurderinger bedes gennemført i detaljer.

Opgave 14 (Vinteren 1998-99 opgave 1)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)(4+z^2)}$$

Med c betegnes randkurven af halvcirklen

$$\{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \arg z \leq \pi \text{ og } |z| \leq R\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning. Det antages, at $R > 2$.
(a) Beregn værdien af integralet $\oint_c f(z)dz$.
(b) Find ved brug af resultatet ovenfor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$$

Alle udregninger samt alle vurderinger bedes gennemført i detaljer.
(c) Bestem herefter integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{(1+t^2)(4+t^2)} dt$$

Opgave 15 (Sommeren 1999 opgave 1)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+1)((z-a)^2+1)}$$

hvor a er en reel konstant forskellig fra nul. Med c betegnes randkurven af halvcirklen

$$\{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \arg z \leq \pi \text{ og } |z| \leq R\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning. Det antages, at $R > 1 + |a|$.
(a) Beregn værdien af integralet $\oint_c f(z)dz$.
(b) Benyt resultatet til at vise, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{(t^2+1)((t-a)^2+1)} dt = \pi \frac{a}{a^2+4}$$

Alle udregninger samt alle vurderinger bedes gennemført i detaljer.

Opgave 16 (Vinteren 1999-2000 opgave 1)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}$$

Med c betegnes randkurven af halvcirklen

$$\{z \in \mathbb{C} | \, 0 \leq \arg z \leq \pi \text{ og } |z| \leq R\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning.
(1) Find polerne og bestem residuerne i disse punkter af funktionen f.
(2) Beregn værdien af integralet $\oint_c f(z)\, dz$ for $0 < R < 2$ og for $3 < R$.
(3) Lad c_R betegne cirkelbuen i randkurven c. Antag $3 < R$ og gør rede for uligheden

$$\left| \int_{c_R} f(z)\, dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 2\sqrt{5}R + 5}$$

(4) Beregn værdierne af integralerne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+4t+5}\, dt = \frac{\pi}{e}\cos(2) \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^2+4t+5}\, dt = -\frac{\pi}{e}\sin(2)$$

Opgave 17 (Sommeren 2000 opgave 1)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{1}{3z^2+10iz-3}$$

(1) Gør rede for, at funktionen f netop har poler i de to punkter $z = -3i$ og $z = -\frac{1}{3}i$. Bestem residuerne.
Med c_R betegnes randkurven af cirklen med radius $R > 0$

$$\{z \in \mathbb{C} | \, |z| \leq R\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning.
(2) Beregn værdierne af integralet $\oint_{c_R} f(z)\, dz$ for $R \neq \frac{1}{3}, 3$.

(3) Gør rede for formlen

$$2if(e^{it})e^{it} = \frac{1}{5+3\sin(t)}$$

(4) Beregn integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin(t)}\,dt$$

Opgave 18 (Vinteren 2000-01 opgave 1)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+9)^2}$$

Med c betegnes randkurven af halvcirklen

$$\{z \in \mathbb{C} |\, 0 \leq \arg z \leq \pi \text{ og } |z| \leq R\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning.
(1) Find polerne samt deres ordener og bestem residuerne i disse punkter af funktionen f.
(2) Beregn værdien af integralet

$$\oint_c f(z)\,dz$$

for $0 < R < 3$ og for $3 < R$.
(3) Lad c_R betegne cirkelbuen i randkurven c. Antag $3 < R$ og gør rede for uligheden

$$\left|\int_{c_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-9)^2}$$

(4) Beregn værdien af integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx$$

Opgave 19 (Vinteren 2001-02 opgave 1)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{1}{z^2+2z}$$

Med c betegnes randkurven af cirklen

$$\{z \in \mathbb{C} |\, |z| \leq R\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning.
(1) Find polerne samt deres ordener og bestem residuerne i disse punkter for funktionen f.
(2) Beregn værdien af integralet

$$\oint_c f(z)\,dz$$

for $0 < R < 2$ og for $2 < R$.

(3) Gør rede for formlen

$$f(e^{it})e^{it} = \frac{2+\cos(t) - i\sin(t)}{5+4\cos(t)}$$

(4) Beregn værdien af integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos(t)}{5+4\cos(t)} dt$$

Opgave 20 (Sommeren 2002 opgave 1)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{e^z}{e^{2z}+1}$$

Med c betegnes randkurven af rektanglet, $R > 0$,

$$\{z \in \mathbb{C} \mid -R \leq \operatorname{Re} z \leq R,\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning.
(1) Funktionen f har netop en pol i rektanglet, $z = \frac{\pi}{2}i$. Bestem orden og residue.
(2) Beregn integralet $\oint_c f(z)\,dz$.
(3) Gør rede for følgende ulighed for $x \neq 0$

$$|f(x+yi)| \leq \frac{e^x}{|e^{2x}-1|}$$

(4) Beregn ved brug af ovenstående de reelle integraler

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh x}\,dx$$

Opgave 21 (Vinteren 2002-03 opgave 1)**.** Lad en kompleks funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2iz - 2}$$

Med c betegnes randkurven af halvcirklen, $R > 0$,

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z,\ |z| \leq R\}$$

gennemløbet med positiv omløbsretning.
(1) Find polerne samt deres ordener og bestem residuerne i disse punkter for funktionen f.
(2) Beregn værdien af integralet

$$\oint_c f(z)\,dz$$

for $0 < R < 1$ og for $2 < R$.
(3) Lad c_R betegne cirkelbuen i randkurven c. Antag $3 < R$ og gør rede for uligheden

$$\left| \int_{c_R} f(z)\,dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 2R - 2}$$

(4) Beregn ved brug af ovenstående det reelle integral

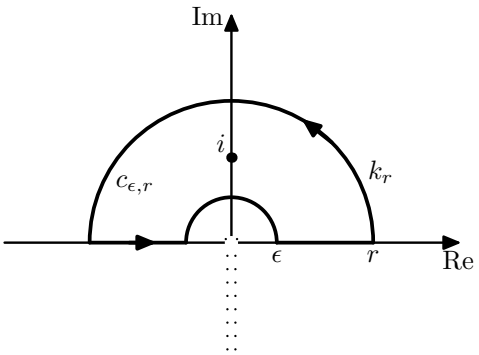
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 2t + 2}\, dt$$

LØSNINGER

Eksamensopgaverne kan løses på mange måder. Her gives kun et enkelt forslag til hver opgave. Løsningerne er taget fra "slides" til forelæsningerne og er derfor nok vel korte til en ren skriftlig besvarelse.

Løsning 12 (Vinteren 1997-98 opgave 1)**.**

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}, \qquad g(z) = \frac{\log z}{(z^2+1)^2}, \qquad h(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$$



(a) Vis for $z \in k_r$ følgende tre uligheder

$$|f(z)| \le \frac{1}{(r^2-1)^2}, \qquad |g(z)| \le \frac{\ln(r)+\pi}{(r^2-1)^2}, \qquad |h(z)| \le \frac{1}{(r^2-1)^2}$$

Løsning.

$$|z^2+1| \ge ||z^2|-1|$$

giver for $|z| = r$

$$|f(z)| \le \frac{1}{(r^2-1)^2}$$

$$|\log z| \le |\ln|z|| + |i \arg z|$$

giver yderligere

$$|g(z)| \le \frac{\ln r + \pi}{(r^2-1)^2}$$

og da

$$|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z}$$

fås i øvre halvplan

$$|h(z)| \le \frac{1}{(r^2-1)^2}$$

(b) Vis, at

$$\oint_{c_{\epsilon,r}} f(z)dz = \frac{\pi}{2} \text{ for } 0 \le \epsilon < 1 \text{ og } \oint_{c_{\epsilon,r}} g(z)dz = -\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4} \text{ for } 0 < \epsilon < 1$$

Løsning. Funktionerne har en pol af orden 2 i $z = i$ som er inden for kurven. Residuer i dette punkt er

$$\begin{aligned} R(f,i) &= ((z+i)^{-2})'_{|z=i} \\ &= -2(z+i)^{-3}_{|z=i} \\ &= \frac{1}{4i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(g,i) &= (\log(z)(z+i)^{-2})'_{|z=i} \\ &= z^{-1}(z+i)^{-2} + \log(z)(-2(z+i)^{-3})_{|z=i} \\ &= -i(2i)^{-2} - \log(i)2(2i)^{-3} \\ &= \frac{i}{4} + \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Residuesætningen giver de to integraler.
(c) Vis, ved brug af det foregående, at det reelle integral $\int_0^\infty f(t)\,dt$ eksisterer og bestem dets værdi.

Løsning. Langs cirkelbuerne fås ved ulighederne i (a)

$$|\int f(z)dz| \leq \frac{1}{(r^2-1)^2}\pi r \to 0,\ r \to \infty$$

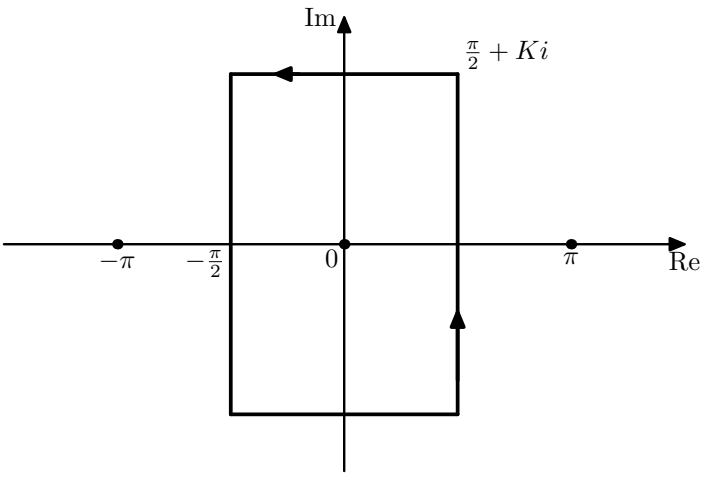
$$|\int f(z)dz| \leq \frac{1}{(1-\epsilon^2)^2}\pi\epsilon \to 0,\ \epsilon \to 0$$

Altså

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \frac{1}{2}\oint f(z)dz = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

Løsning 13 (Sommeren 1998 opgave 1)**.**

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{e^{2iz}-1}$$



(a) Bestem samtlige singulære punkter for f. Bestem deres type, og for poler bestem deres orden.

Løsning. De singulære punkter er

$$e^{2iz} - 1 = 0 \Rightarrow 2iz = 2pi\pi \Rightarrow z = p\pi,\ p \in \mathbb{Z}$$

Da

$$(e^{2iz} - 1)' = 2ie^{2iz} \neq 0$$

er de fundne punkter simple poler .
(b) Beregn værdien af integralet $\oint_c f(z)dz$.

Løsning. Kun polen $z = 0$ er inden for kurven c. Residuet er

$$\begin{aligned} R(f,0) &= \frac{e^{iz}}{(e^{2iz}-1)'}_{|z=0} \\ &= \frac{e^{iz}}{2ie^{2iz}}_{|z=0} \\ &= \frac{1}{2i} \end{aligned}$$

Så residuesætningen giver

$$\begin{aligned} \oint_c f(z)dz &= 2\pi i(\frac{1}{2i}) \\ &= \underline{\underline{\pi}} \end{aligned}$$

(c) Benyt det fundne resultat til at vise formlen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh t}\, dt = \pi$$

Løsning. Langs linjestykket $z = \frac{\pi}{2} + iy$:

$$\int f(z)dz = \int_{-K}^{K} \frac{e^{-y}}{e^{-2y}+1}\, dy$$

Langs linjestykket $z = x + iK$:

$$\int f(z)dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{ix}e^{-2K}}{e^{2ix-2K}+1}\, dx$$

Ved trekantsuligheden

$$|f(z)| \leq \frac{e^{-2K}}{1-e^{-2K}}$$

$$|\int f(z)dz| \leq \frac{e^{-2K}}{1-e^{-2K}}\pi \to 0, K \to \infty$$

Altså

$$2\int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{\pi}{2} + iy)i\, dy = \oint f(z)dz$$

Dette giver

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{-y}}{e^{-2y}+1}\, dy = \pi$$

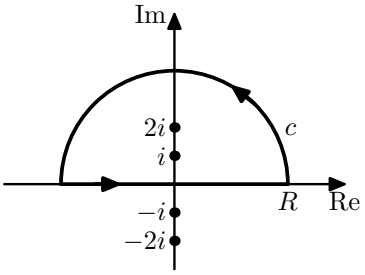
I alt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh t}\, dt = \pi$$

som angivet.

Løsning 14 (Vinteren 1998-99 opgave 1)**.**

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)(4+z^2)}$$



(a) Beregn værdien af integralet $\oint_c f(z)dz$.

Løsning. De singulære punkter er

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i$$

$$z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i$$

som alle er simple poler, da et 4.grads polynomium højst har 4 rødder og $e^{iz} \neq 0$.
De 2 punkter med positiv imaginær del er inden for c. Residuet i disse punkter beregnes

$$\begin{aligned} R(f,i) &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z) \\ &= \frac{e^{iz}}{(z+i)(z^2+4)}_{|z=i} \\ &= \frac{e^{-1}}{6i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(f,2i) &= \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z+2i)}_{|z=2i} \\ &= \frac{e^{-2}}{-12i} \end{aligned}$$

Residuesætningen giver

$$\begin{aligned} \oint_c f(z)dz &= 2\pi i(\frac{e^{-1}}{6i} + \frac{e^{-2}}{-12i}) \\ &= \pi(\frac{e^{-1}}{3} - \frac{e^{-2}}{6}) \end{aligned}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{6}(2e^{-1} - e^{-2})}}$$

(b) Find ved brug af resultatet ovenfor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$$

Løsning. Langs cirkelbuen fås ved trekantsuligheden

$$|f(z)| \leq \frac{\max_{t\in[0,\pi]} e^{-R\sin t}}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

$$|\int f(z)dz| \leq \frac{1}{(R^2-1)(R^2-4)}\pi R \to 0,\ R \to \infty$$

Altså

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \oint f(z)dz = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}(2e^{-1} - e^{-2})}}$$

(c) Bestem herefter integralet

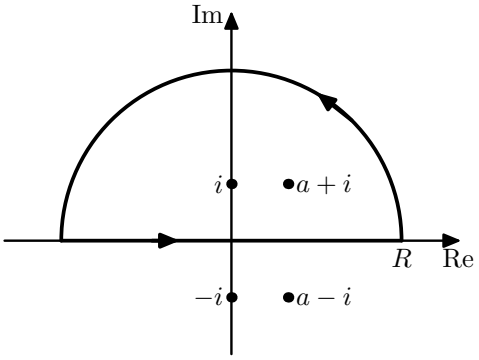
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{(1+t^2)(4+t^2)}dt$$

Løsning. Integralet er realdelen af integralet i (b), så

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t}{(1+t^2)(4+t^2)}dt = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}(2e^{-1} - e^{-2})}}$$

Løsning 15 (Sommeren 1999 opgave 1)**.**

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+1)((z-a)^2+1)}, \quad a > 0$$



(a) Beregn værdien af integralet $\oint_c f(z)dz$.

Løsning. De singulære punkter er

$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i$$

$$(z-a)^2 + 1 = 0 \Rightarrow z - a = \pm i \Rightarrow z = a \pm i$$

som alle er simple poler, da et 4.grads polynomium højst har 4 rødder.

De 2 punkter med positiv imaginær del er inden for c. Residuet i disse punkter beregnes

$$\begin{aligned} R(f,i) &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z) \\ &= \frac{z}{(z+i)((z-a)^2+1)}_{|z=i} \\ &= \frac{i}{2i(a^2-2ia)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(f,a+i) &= \frac{z}{(z^2+1)(z-a+i)}_{|z=a+i} \\ &= \frac{a+i}{2i(a^2+2ia)} \end{aligned}$$

Residuesætningen giver

$$\begin{aligned} \oint_c f(z)dz &= 2\pi i(\frac{i}{2i(a^2-2ia)} + \frac{a+i}{2i(a^2+2ia)}) \\ &= \pi(\frac{ia^2-2a}{a^4+4a^2} + \frac{a^3-2ia+ia^2+2a}{a^4+4a^2}) \\ &= \underline{\underline{\pi\frac{a}{a^2+4}}} \end{aligned}$$

(b) Benyt resultatet til at vise, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{(t^2+1)((t-a)^2+1)}dt = \pi\frac{a}{a^2+4}$$

Løsning. Integralet er konvergent ved sammenligning med et polynomium af grad 3.
Langs cirkelbuen fås ved trekantsuligheden

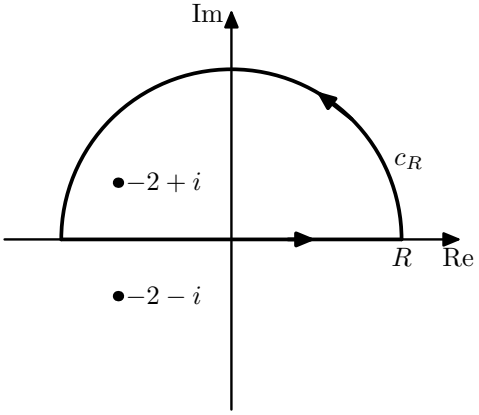
$$|\int f(z)dz| \leq \frac{R}{(R^2-1)((R-|a|)^2-1)}\pi R \to 0,\ R\to\infty$$

Altså

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{(t^2+1)((t-a)^2+1)}dt = \oint f(z)dz = \pi\frac{a}{a^2+4}$$

Løsning 16 (Vinteren 1999-2000 opgave 1)**.**

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}$$



(1) Find polerne og bestem residuerne i disse punkter af funktionen f.

Løsning. Simple poler for

$$z^2 + 4z + 5 = 0 \Rightarrow z = \underline{\underline{-2 \pm i}}$$

med residuer

$$R(f, -2+i) = f(z)(z - (-2+i))_{|z=-2+i} = \underline{\underline{\frac{e^{-1-2i}}{2i}}}$$

$$R(f, -2-i) = f(z)(z - (-2-i))_{|z=-2-i} = \underline{\underline{-\frac{e^{1-2i}}{2i}}}$$

(2) Beregn værdien af integralet $\oint_c f(z)\,dz$ for $0 < R < 2$ og for $3 < R$.

Løsning. For $0 < R < 2$ er der ingen poler inden for kurven c. Så Cauchy's sætning giver

$$\oint_c f(z)dz = \underline{\underline{0}}$$

For $3 < R$ er polen i $z = -2 + i$ inden for kurven c. Så residue sætningen giver

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \frac{e^{-1-2i}}{2i} = \underline{\underline{\pi e^{-1-2i}}}$$

(3) Lad c_R betegne cirkelbuen i randkurven c. Antag $3 < R$ og gør rede for uligheden

$$\left| \int_{c_R} f(z)\,dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 2\sqrt{5}R + 5}$$

Løsning.

$$|z^2 + 4z + 5| = |z + 2 - i||z + 2 + i| \geq ||z| - \sqrt{5}|^2$$

giver for $z \in c_R$

$$|f(z)| = |\frac{e^{-\operatorname{Im}(z)}}{|z^2 + 4z + 5|} \leq \frac{1}{(R - \sqrt{5})^2}|$$

og dermed

$$\left|\int_{c_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 2\sqrt{5}R + 5}$$

(4) Beregn værdierne af integralerne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+4t+5}\,dt = \frac{\pi}{e}\cos(2) \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^2+4t+5}\,dt = -\frac{\pi}{e}\sin(2)$$

Løsning.

$$\oint_c f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(t)\,dt + \int_{c_R} f(z)\,dz$$

Så af (3) fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{t^2+4t+5}\,dt = \pi e^{-1-2i}$$

Realdel og imaginærdel giver

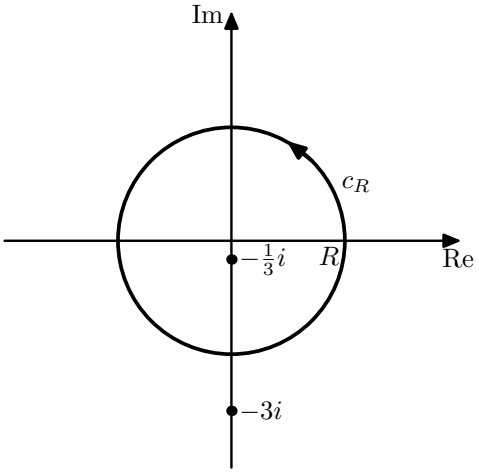
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+4t+5}\,dt = \frac{\pi}{e}\cos(2)$$

og

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^2+4t+5}\,dt = -\frac{\pi}{e}\sin(2)$$

Løsning 17 (Sommeren 2000 opgave 1)**.**

$$f(z) = \frac{1}{3z^2 + 10iz - 3}$$



(1) Gør rede for, at funktionen f netop har poler i de to punkter $z = -3i$ og $z = -\frac{1}{3}i$. Bestem residuerne.

Løsning. Simple poler for

$$3z^2 + 10iz - 3 = 0 \Rightarrow z = -3i,\ z = -\frac{1}{3}i$$

med residuer

$$R(f,-3i) = \frac{1}{6z+10i}_{|z=-3i} = \underline{\underline{-\frac{1}{8i}}}$$

$$R(f,-\frac{1}{3}i) = \frac{1}{6z+10i}_{|z=-\frac{1}{3}i} = \underline{\underline{\frac{1}{8i}}}$$

(2) Beregn værdierne af integralet $\oint_{c_R} f(z)\,dz$ for $R \neq \frac{1}{3}, 3$.

Løsning. For $0 < R < \frac{1}{3}$ er der ingen poler inden for kurven c_R. Så Cauchy's sætning giver

$$\oint_{c_R} f(z)dz = \underline{\underline{0}}$$

For $\frac{1}{3} < R < 3$ er polen i $z = -\frac{1}{3}i$ inden for kurven c_R. Så residuesætningen giver

$$\oint_{c_R} f(z)dz = 2\pi i\frac{1}{8i} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

For $3 < R$ er begge poler inden for kurven c_R. Så residuesætningen giver

$$\oint_{c_R} f(z)dz = 2\pi i(\frac{1}{8i} - \frac{1}{8i}) = \underline{\underline{0}}$$

(3) Gør rede for formlen

$$2if(e^{it})e^{it} = \frac{1}{5+3\sin(t)}$$

Løsning.

$$\begin{aligned} 2if(e^{it})e^{it} &= \frac{2ie^{it}}{3e^{2it}+10ie^{it}-3} \\ &= \frac{2i}{3(e^{it}-e^{-it})+10i} \\ &= \frac{1}{3\sin(t)+5} \end{aligned}$$

(4) Beregn integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin(t)}\,dt$$

Løsning. For c_1 parametriceret med $t \to e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$ er

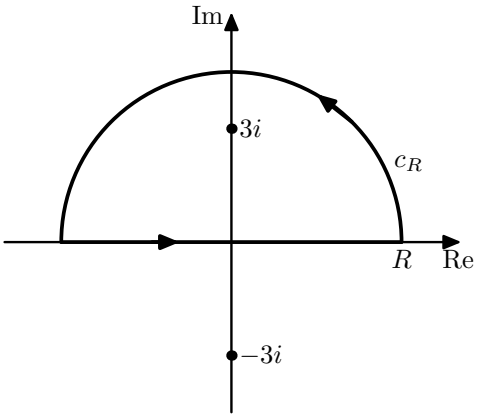
$$\oint_{c_1} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it})ie^{it}\,dt$$

Fra (1) og (3) fås

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin(t)}\,dt = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

Løsning 18 (Vinteren 2000-01 opgave 1)**.**

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+9)^2}$$



(1) Find polerne samt deres ordener og bestem residuerne i disse punkter af funktionen f.

Løsning. Simple nulpunkter for

$$z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i) = 0$$

giver poler for f

$$z = \underline{\underline{\pm 3i}}$$

begge af orden $\underline{\underline{2}}$. Residuerne beregnes

$$R(f, -3i) = ((z-3i)^{-2})'_{|z=-3i} = \underline{\underline{-\frac{1}{108i}}}$$

$$R(f, 3i) = ((z+3i)^{-2})'_{|z=3i} = \underline{\underline{\frac{1}{108i}}}$$

(2) Beregn værdien af integralet

$$\oint_c f(z)\,dz$$

for $0 < R < 3$ og for $3 < R$.

Løsning. For $0 < R < 3$ er der ingen poler inden for kurven c. Så Cauchy's sætning giver

$$\oint_c f(z)dz = \underline{\underline{0}}$$

For $3 < R$ er polen i $z = 3i$ inden for kurven c. Så residuesætningen giver

$$\oint_{c_R} f(z)dz = 2\pi i \frac{1}{108i} = \underline{\underline{\frac{\pi}{54}}}$$

(3) Lad c_R betegne cirkelbuen i randkurven c. Antag $3 < R$ og gør rede for uligheden

$$\left|\int_{c_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-9)^2}$$

Løsning.

$$|z^2+9| \geq ||z^2|-9|$$

giver for $|z| = R$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{(R^2-9)^2}$$

Da længden af c_R er πR fås

$$\left|\int_{c_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-9)^2}$$

(4) Beregn værdien af integralet

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx$$

Løsning.

$$\int_c f(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{c_R} f(z)\,dz$$

For $R \to \infty$ fås af (2) og (3)

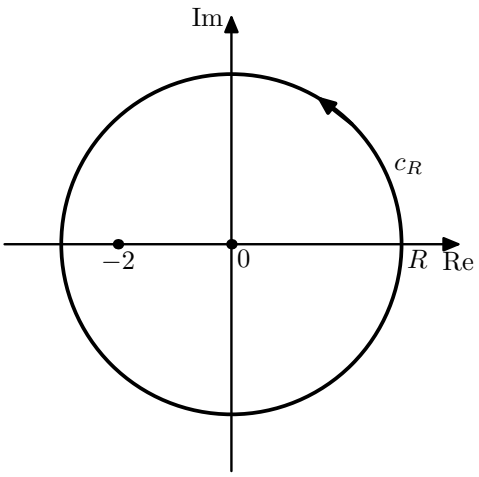
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{\pi}{54}$$

og dermed da integranten er en lige funktion

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx = \underline{\underline{\frac{\pi}{108}}}$$

Løsning 19 (Vinteren 2001-02 opgave 1)**.**

$$f(z) = \frac{1}{z^2+2z}$$



(1) Find polerne samt deres ordener og bestem residuerne i disse punkter af funktionen f.

Løsning. Simple nulpunkter for

$$z^2 + 2z = (z+2)z = 0$$

giver poler for f

$$z = \underline{\underline{0, -2}}$$

begge af orden $\underline{\underline{1}}$. Residuerne beregnes

$$R(f, 0) = (z+2)^{-1}_{|z=0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$R(f, -2) = z^{-1}_{|z=-2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

(2) Beregn værdien af integralet

$$\oint_c f(z)\, dz$$

for $0 < R < 2$ og for $2 < R$.

Løsning. For $0 < R < 2$ er polen i $z = 0$ inden for kurven c. Så residuesætning giver

$$\oint_c f(z)dz = \underline{\underline{\pi i}}$$

For $2 < R$ er polerne i $z = 0, -2$ inden for kurven c. Så residuesætningen giver

$$\oint_{c_R} f(z)dz = 2\pi i(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = \underline{\underline{0}}$$

(3) Gør rede for formlen

$$f(e^{it})e^{it} = \frac{2 + \cos(t) - i\sin(t)}{5 + 4\cos(t)}$$

Løsning.

$$\begin{aligned} f(e^{it})e^{it} &= \frac{1}{e^{it} + 2} \\ &= \frac{e^{-it} + 2}{|e^{it} + 2|^2} \\ &= \frac{\cos(t) + 2 + i\sin(-t)}{(\cos(t) + 2)^2 + \sin^2(t)} \\ &= \frac{\cos(t) + 2 - i\sin(t)}{5 + 4\cos(t)} \end{aligned}$$

(4) Beregn værdien af integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{2 + \cos(t) - i\sin(t)}{5 + 4\cos(t)}\, dt$$

Løsning. For $R = 1$ er c parametriseret ved

$$z(t) = e^{it},\ dz = ie^{it}dt$$

så

$$\oint_c f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it})ie^{it}dt$$

Hermed

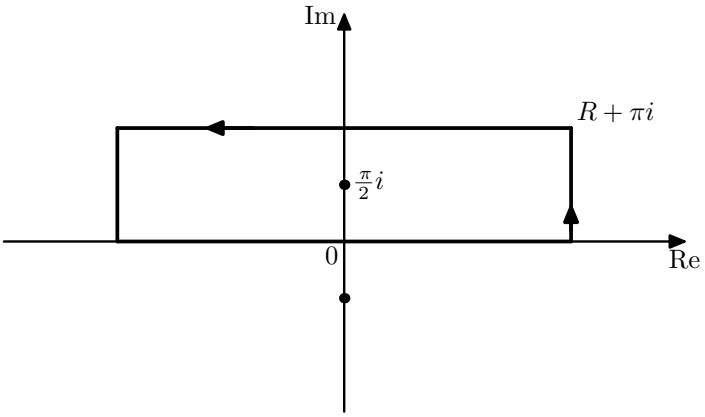
$$\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos(t) - i\sin(t)}{5+4\cos(t)}\,dt = \frac{1}{i}\oint_c f(z)dz = \pi$$

Realdel giver

$$\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos(t)}{5+4\cos(t)}\,dt = \underline{\underline{\pi}}$$

Løsning 20 (Sommeren 2002 opgave 1)**.**

$$f(z) = \frac{e^z}{e^{2z}+1}$$



(1) Bestem orden og residue i $z = \frac{\pi}{2}i$.

Løsning. Da

$$(e^{2z}+1)' = 2e^{2z} \neq 0$$

er polen simpel. Residuet beregnes

$$\begin{aligned} R(f, \frac{\pi}{2}i) &= \frac{e^z}{(e^{2z}+1)'}_{|z=\frac{\pi}{2}i} \\ &= \frac{e^z}{2e^{2iz}}_{|z=\frac{\pi}{2}i} \\ &= \underline{\underline{-\frac{i}{2}}} \end{aligned}$$

(2) Beregn værdien af integralet $\oint_c f(z)dz$.

Løsning. Kun polen $z = \frac{\pi}{2}i$ er inden for kurven c. Så residuesætningen giver

$$\begin{aligned} \oint_c f(z)dz &= 2\pi i(-\frac{i}{2}) \\ &= \underline{\underline{\pi}} \end{aligned}$$

(3) Gør rede for uligheden

$$|f(x+yi)| \leq \frac{e^x}{|e^{2x}-1|}$$

Løsning. Der gælder

$$|e^z| = e^x$$

og ved trekantsulighederne er

$$|e^{2z}+1| \geq ||e^{2z}| - |1|| = |e^{2x}-1|$$

Heraf følger uligheden.
(4) Beregn de reelle integraler

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx \text{ og } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh x}\,dx$$

Løsning. Langs linjestykkerne $z = x$ og $z = x + \pi i$:

$$\int f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{x+\pi i}}{e^{2(x+\pi i)}+1}\,dx$$

Langs linjestykkerne $z = \pm R + yi$ fås ved (3):

$$|\int f(z)dz| \leq \frac{e^{\pm 2R}}{|e^{\pm 2R}-1|}\pi \to 0, R \to \infty$$

Altså

$$2\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \oint f(z)dz$$

Dette giver

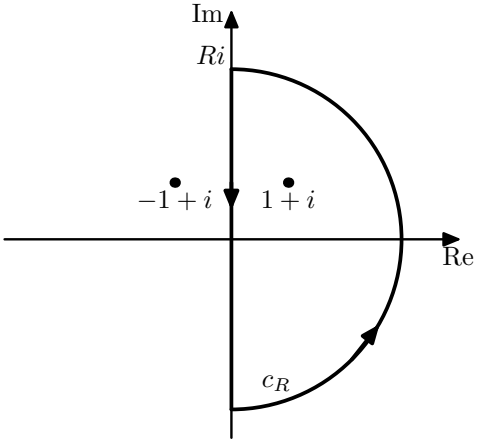
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

og dermed

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{e^x+e^{-x}}\,dx = \underline{\underline{\pi}}$$

Løsning 21 (Vinteren 2002-03 opgave 1)**.**

$$f(z) = \frac{1}{z^2-2iz-2}$$



(1) Find polerne samt deres ordener og bestem residuerne i disse punkter af funktionen f.

Løsning. Nulpunkter for

$$z^2 - 2iz - 2 = 0, \;\; z = i \pm 1$$

giver poler for f

$$z = \underline{\underline{-1+i, \; 1+i}}$$

begge af orden $\underline{\underline{1}}$. Residuerne beregnes

$$R(f, -1+i) = \frac{1}{2z - 2i}\,|_{z=-1+i} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$R(f, 1+i) = \frac{1}{2z - 2i}\,|_{z=1+i} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(2) Beregn værdien af integralet

$$\oint_c f(z)\,dz$$

for $0 < R < 1$ og for $3 < R$.

Løsning. Polerne har modulus $\sqrt{2}$. For $0 < R < 1$ er der ingen poler inden for kurven c. Så residuesætning giver

$$\oint_c f(z)dz = \underline{\underline{0}}$$

For $3 < R$ er polen i $z = 1+i$ inden for kurven c. Så residuesætningen giver

$$\oint_{c_R} f(z)dz = 2\pi i(\frac{1}{2}) = \underline{\underline{\pi i}}$$

(3) Lad c_R betegne cirkelbuen i randkurven c. Antag $3 < R$ og gør rede for uligheden

$$\left| \int_{c_R} f(z)\,dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 2R - 2}$$

Løsning.

$$|z^2 - 2iz - 2| \geq ||z^2| - |2iz - 2|| \geq |z|^2 - 2|z| - 2$$

giver for $|z| = R$

$$|f(z)| \leq \frac{1}{R^2 - 2R - 2}$$

Da længden af c_R er πR fås

$$\left| \int_{c_R} f(z)\, dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 2R - 2}$$

(4) Beregn ved brug af ovenstående det reelle integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 2t + 2}\, dt$$

Løsning. $[Ri, -Ri]$ er parametriseret ved

$$z(t) = -ti,\ dz = -idt,\ t \in [-R, R]$$

så

$$\oint_c f(z)dz = \int_{-R}^{R} -f(-ti)i\, dt + \int_{c_R} f(z)\, dz$$

Hermed for $R \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i}{(-ti)^2 - 2i(-ti) - 2}\, dt = \pi i$$

altså

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 2t + 2}\, dt = \underline{\underline{\pi}}$$

LITTERATUR

Lars V. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill 1963.

Berenstein & Gay, *Complex variables*, Springer-Verlag 1991.

Bohr & Mollerup, *Lærebog i matematisk analyse*, Gjellerup 1949.

Robert Burckel, *An introduction to classical complex analysis*, Academic Press 1979.

Henri Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques...*, Herman 1961.

John B. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag 1978.

Birger Iversen, *Notes on complex analysis*, Aarhus 1994.

Børge Jessen, *Funktioner af en kompleks variabel*, København 1965.

Kunihiko Kodaira, *Introduction to complex analysis*, Cambridge 1984.

Jerrold E. Marsden, *Basic complex analysis*, Freeman 1973.

Raghavan Narasimhan, *Complex analysis in one variable*, Birkhäuser 1985.

Rao & Stetkær, *An invitation: A concise introduction to complex function theory*, World Sc. 1991.

Reinhold Remmert, *Theory of complex functions*, Springer-Verlag 1991.

Sansone & Gerretsen, *Lectures on the theory of functions og a complex variable*, Groningen 1960/69.

Palle Schmidt, *Kompleks funktionsteori*, Aarhus 1970.

Stewart & Tall, *Complex analysis*, Cambridge 1983.

Stikord

åben afbildning, 42, 61

absolut værdi, 4
algebraens fundamentalsætning, 42
analytisk, 45
andengradsligning, 9
argument, 5
argumentprincippet, 59

Bernoulli tal, 75
binomialrækken, 47
Brouwers fixpunktssætning, 36

Cauchy-Riemann ligningerne, 23
Cauchys integralformler, 40
Cauchys integralsætning, 38
Cauchys uligheder, 41
cotangens integral, 74

de Moivre, 8

elementære funktioner, 22, 47
enhedsrødder, 16
Eulers formler, 15
Eulers integral, 72
exponentialfunktion, 13

Fresnels integraler, 72

Gauss sum, 78
Gauss' integral, 71
Greens sætning, 32

hæveligt singulært punkt, 52
holomorf, 21
hovedbestemmelsen, 6, 13
hyperbolske funktioner, 15

identitetsprincippet, 49
imaginærdel, 2
imaginære enhed, 2
indeks, 33
indenfor, 31
indhegning, 31
isoleret singulært punkt, 52

kompakt, 21
kompleks funktion, 21
kompleks plan, 3
kompleks tal, 2
konjugerede tal, 2
kurve, 27
kurveintegral, 27
kvadratrod, 8

længde, 27
Laurentrække, 52
Laurentrækken, 52
Liouvilles sætning, 41
logaritmefunktionen, 13
lukket kurve, 27

Möbius transformation, 12
maksimumsprincippet, 43, 50
meromorf, 52
modulus, 4
Moreras betingelse, 49
multiplikativitet, 4

nulpunkt, 52

omløbsretning, 4
omløbstal, 33
område, 21

partialbrøkfremstilling, 76
pol af orden (multiplicitet) k, 52
polære koordinater, 5
potenser, 15
primitiv enhedsrod, 16
produktudvikling, 78

rødder, 8
realdel, 2
rektangulære koordinater, 3
residuesætningen, 59
residuet, 54
Rouchés sætning, 60

Schwarz's lemma, 50
simpel kurve, 27
simpel lukket kurve, 27
simpel nulpunkt, 52
simpel pol, 52
sinus integral, 73

Taylorrække, 46
tredjegradsligning, 18
trekantsuligheder, 4
trigonometriske funktioner, 15

væsentligt singulært punkt, 52

Weierstrass, 53