Kategori-teori, og matematikkens grundlag

Anders Kock

Institut for Matematiske Fag, Aarhus Universitet

1998*

"De sidste årtiers udvikling af matematikken viser klart fremvæksten af den overbevisning, at de relevante egenskaber ved matematiske objekter er de, der kan udtrykkes i termer af deres abstrakte struktur, snarere end i termer af de elementer, som objekterne kunne tænkes at bestå af."

Dette er indledningen til F.W. Lawveres artikel "The category of categories as a foundation for mathematics", [L2], fra 1965. Den repræsenterer en ny synsvinkel på matematikkens grundlag, som jeg skal forsøge at referere.

Hvad er en *"relevant egenskab"* ved mængden $\mathbb{R}$ af de reelle tal? En relevant egenskab er ikke, om et reelt tal er et Dedekind-snit i de rationale tal, eller en uendelig decimalbrøk, eller noget tredie, men at de reelle tal samlet *har struktur* af et arkimedisk og fuldstændig ordnet legeme. Denne struktur er et aspekt ved mængden $\mathbb{R}$ af de reelle tal som objekt, i dets relation til andre matematiske objekter - hvilke afbildninger, der kan konstrueres mellem $\mathbb{R}$ og andre matematiske objekter – konstruktioner, der ikke afhænger af andet end de postulerede egenskaber ved $\mathbb{R}$: fuldstændig og arkimedisk ordnet legeme.

Det, der berettiger det bestemte kendeord "de" i vendingen "de" reelle tals legeme, er: entydigheden af arkimedisk og fuldstændigt ordnede legemer, *op til isomorfi*. Der findes forfærdelig mange arkimedisk fuldstændigt ordnede legemer, men de er alle isomorfe (ved entydigt bestemte isomorfier). Alle har lige god ret til betegnelsen "de" reelle tal $\mathbb{R}$. Det er den objektive grund til, at den matematiske praksis bruger et *egennavn* som $\mathbb{R}$. For den aksiomatiske mængdeteoris synspunkt, derimod, er et objekt givet ved sine

*Rekompileret 2009 fra "*Netværk i Matematikkens Historie og Filosofi – Nyhedsbrev*" (IMFUFA, Roskilde), Nr. 4, Sept. 1998.

elementer, og hvilke af de forskellige konstruktioner af $\mathbb{R}$, der fortjener betegnelsen: "de" reelle tal (er det mængden af Dedekind-snit ? er det mængden af uendelige decimalbrøker,...?), bliver til et subjektivt eller juridisk definitionsspørgsmål, med forskellige svar i Odense, Århus og Viborg: $\mathbb{R}_0$, $\mathbb{R}_A$, $\mathbb{R}_V$.

Det kategoriteoretiske grundlag nedtoner objekternes "indmad" (deres elementer), og hæfter sig ved deres "sociologi", de *afbildninger* (funktioner), der relaterer dem til andre objekter. Hvor den grundlæggende hieroglyf i det mængdeteoretiske grundlag er *"tilhører"-tegnet* $x \in y$, er den grundlæggende hieroglyf i det kategoriteoretiske grundlag *pilen* $f : X \to Y$, (herunder: X er isomorf med Y, eller X er ækvipotent med Y), og en kategoriteoretisk aksiomatik starter med afbildningsbegrebet, og med sammensætning af afbildninger: $X \to Y \to Z$; "sammensætning" er den fundamentale formelle struktur i en kategori.

Lawveres program fra 1965 med kategorien af *kategorier* som et muligt, og mere realistisk, grundlag for matematik, var måske forud for sin tid i 1965 - i øjeblikket er "højere-dimensional kategoriteori", som et sådant grundlag henhører under, et varmt forskningsemne (bl.a. i teoretisk fysik), men stadig temmelig teknisk krævende. Derimod har en simplere variant, baseret på en aksiomatisk teori for *kategorien af mængder*, fået stor udbredelse. Denne teori går under navnet *topos teori*. Den har sit udspring i algebraisk geometri fra omkring 1960 (Grothendieck), og har siden omkring 1970 været inddraget i Lawveres program, som et realistisk grundlag for matematik.

Kategorien af mængder har bl.a. egenskaberne: der kan dannes produktobjekter (produktmængder) $A \times B$, og der kan dannes funktionsobjekter C^D (= mængden af afbildninger fra D til C); begge dele er noget, der kan beskrives rent kategoriteoretisk. F.eks. er *produktmængden* $A \times B$ udstyret med projektionsafbildninger $A \times B \to A$ og $A \times B \to B$, med en velkendt universel egenskab, som bestemmer produktmængden entydigt *op til isomorfi*. En kategori, der har produktdannelse og funktionsobjekt-dannelse kaldes en *cartesisk lukket kategori* (efter Descartes, der siges at have indført produktmængder, specielt den cartesiske plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). En topos er en kartesisk lukket kategori, der yderligere besidder "equalizere": $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ og en "delobjekt-klassifikator", dvs. et objekt, typisk $2 = 1 + 1$, der kan fungere som værdimængde for karakteristiske funktioner for delmængder ($f(x) = 1$ hvis x tilhører delmængden; $f(x) = 0$ ellers).

Ethvert computer-program med regneark har et sådant objekt (datatype); det går ofte under navnet "Boole" eller lign. Topos teorien aksiomatiserer disse aspekter ved kategorien af mængder.

– Så fik *mængderne* alligevel det sidste ord? Absolut ja. Mængdebegrebet, som anskuet i den *naive* mængdeteori, som hos Cantor, er et tænkemønster, en nødvendighed, som matematikere ikke længere kan eller vil slippe, lige så lidt som vi kan eller vil slippe begrebet om *afbildning* mellem mængder – det, som *kategorien* af mængder opsummerer, og som også er centralt i Cantors fundamentale begreb om ækvipotens af mængder. Den aksiomatiske mængdeteori, derimod, er et, blandt flere, reduktionistiske forsøg på forsikring mod paradokser, og er, for de fleste matematikere ikke et tankesæt, der påtvinger sig med *nødvendighed.* Hvor mange af læserne har været nødt til, i dag, f.eks., at tænke på sagsforholdet $x \in y \in z$, et sagsforhold, som er centralt i aksiomatisk mængdeteori (men ikke i den naive mængde-teori); og hvor mange har i dag tænkt sagsforholdet "sammensat funktion" $g \circ f$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

mit gæt er, at det sidstnævnte er det daglige brød for læseren, ikke det førstnævnte.

– Men lad os vende os fra polemikken (se evt. en udførlig polemik på [FOM], specielt posteringerne medio Jan. 1998 fra Friedman og McLarty): det er i dag vel undersøgt (se f.eks. [MM]), hvordan aksiomatisk mængdeteori kan interpreteres i topos-teori, og omvendt. Og så skal det iøvrigt siges, at topos-teori ikke er videre interesseret i matematikkens grundlag i reduktionistisk forstand. Derimod har den suget næring fra, og bidraget til, studiet af de mange kategorier (specielt toposer), der opstår i matematisk praksis, jvf. oprindelsen i algebraisk geometri. Men også "sheaf models", forcing, og Kripke-semantik afklares ved at blive forstået topos teoretisk. Toposer bestående af Kripke-modeller opfører sig som kategorien af mængder ville se ud for en intuitionist eller konstruktivist. Dermed har topos teori bidraget til at gøre intuitionistisk logik til noget objektivt, der lader sig afprøve også af den klassiske matematiker. På grund af sin konstruktive karakter og relation til lambda kalkyle (se [LS]) er topos teorien ogsårelevant, og et forskningsemne, i teoretisk datalogi. Dette i overensstemmelse med en tese om, at forskning i matematikkens grundlag ikke har til formål at *reducere* matematik til én formel teori, men at analysere hvad der er *universelt* i matematik.

Referencer

[L1] F.W. Lawvere, An Elementary Theory of the Category of Sets, Proc.

Nat. Acad. Sci. USA 50 (1964), 869-72.
[L2] F.W. Lawvere, The Category of Categories as a Foundation for Mathematics, in Proceedings of the Conference of Categorical Algebra, LaJolla 1965. Springer 1966.
[L3] F.W. Lawvere, Introduction, in "Toposes, Algebraic Geometry and Logic", Proceedings Halifax 1971, Springer Lecture Notes in Math. 274 (1972).
[LS] J. Lambek og P. Scott, Introduction to Higher Order Categorical Logic, Cambridge University Press 1986.
[MM] S. Mac Lane og I. Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer 1992.
[McL] C. McLarty, Elementary Categories, Elementary Toposes, Oxford Sci. Publ. 1995.
[FOM] Netværk for Foundations of Mathematics,
www.math.psu.edu/simpson/fom/

Note (2009)

Når der i teksten henvises til "aksiomatisk mængdeteori", forstås mængdeteori i Zermelo-Fraenkel's forstand. En aksiomatik for *kategorien* af mængder som i [L1] er noget ganske andet.

Udsagnet, at "mængderne alligevel fik det sidste ord" er ikke en præcis formulering; der burde stå "kategorien af mængder fik det sidste ord ..." (hvad den efterfølgende tekst også udtrykker). For kategorien af mængder kan også henvises til lærebogen

F. W. Lawvere og R. Rosebrugh, Sets for Mathematics, Cambridge University Press 2003,

der introducerer og udvikler *... set theory as the algebra of mappings ....*