Entydighed af „invers“ ved diagonalisering

Lad $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ *være givet,* $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ *være en matrix bestående af søjlevektorer* $b_i, \quad i = 1, \ldots, n$*, der er egenvektorer for* A *med tilhørende egenværdier* $\lambda_i, \quad i = 1, \ldots, n$ *og* Λ *være diagonalmatricen med diagonalindgange* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*. Lad* $M = \{D \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) | DAB = \Lambda\}$*, dvs.* M *er mængden af matricer* D*, der opfylder, at* $DAB = \Lambda$*. Så er* $M = \{B^{-1}\}$ *hvis og kun hvis* $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon \lambda_i \neq 0$*.*

Det, ovenstående sætning siger, er, groft sagt, at vi, hvis vi ganger en matrix D på AB fra venstre og får Λ, kan konkludere, at $D = B^{-1}$ hvis og kun hvis $\lambda_i \neq 0 \forall i$ (hvilket i øvrigt er det samme som at Λ er invertibel).

For at vise sætningen, skal vi vise to ting: For det første *hvis* $\lambda_i \neq 0$, så er $M = \{B^{-1}\}$, og for det andet, at *hvis* $M = \{B^{-1}\}$, så er $\lambda_i \neq 0$.

Antag først, at $\lambda_i \neq 0$. Da $\lambda_i \neq 0$ er Λ invertibel, dvs. $\det(\Lambda) \neq 0$ og dermed $\det(B) \neq 0$ og $\det(D) \neq 0$, da produktet af determinanterne er lig med determinanten af produkterne (overvej!). Altså er B invertibel, og vi ved, at $B^{-1} \in M$ per Sætning 16, og skal derfor blot vise, at at hvis $DAB = \Lambda$, så er $D = B^{-1}$. Da D også var invertibel, har vi, at $AB = D^{-1}\Lambda$. Nu ganger vi den i'te standardbasisvektor e_i på på begge sider:

$$\lambda_i b_i = Ab_i = ABe_i = D^{-1}\Lambda e_i = D^{-1}\lambda_i e_i = \lambda_i D^{-1} e_i$$

Dividerer vi nu igennem med λ_i, ser vi, at $b_i = D^{-1}e_i$, med andre ord, at den i'te søjle i D's inverse er lig med den i'te søjle i B. Altså er $D^{-1} = B$ eller $D = B^{-1}$. Vi har altså vist, at $M = \{B^{-1}\}$.

Antag nu for modstrid, at $M = \{B^{-1}\}$ men $\exists i \in \{1, \ldots, n\} \colon \lambda_i = 0$. Lad $a \neq 0$ og E_a være elementærmatricen, der svarer til at gange den i'te række med a. Så er $\Lambda = E_a\Lambda$, og dermed er $(E_a B^{-1})AB = E_a(B^{-1}AB) = E_a\Lambda = \Lambda$, og altså er $E_a B^{-1} \in M$. Da $E_a B^{-1} \neq B^{-1}$, da B^{-1} oplagt er invertibel, og dermed ikke har nogen nulrække, er altså $M \neq \{B^{-1}\}$, i modstrid med antagelsen. Altså kan vi konkludere, at $M = \{B^{-1}\}$ medfører, at $\forall i \colon \lambda_i \neq 0$.

Morten Grud Rasmussen

4. januar 2005