Mere varmemester – vejledende besvarelse

Vi skal finde temperaturerne x og y i to lokaler, der deler en væg, givet formlen for temperaturen T i et trekantet rum:

$$T = \frac{s \cdot a + t \cdot b + r \cdot c}{s + t + r},$$

hvor s, t og r betegner arealet af væggen og a, b og c betegner temperaturen i de respektivt tilstødende rum.

Vort tilfælde er skitseret i [LA] side 48. Temperaturen skal findes i tilfældet, hvor temperaturerne i de tilstødende lokaler er hhv. 20, 10, 20 og 10, samt hvor de tilsvarende temperaturer er hhv. a, b, c og d. Rækkefølgen er efter systemet "venstre mod højre, oppe fra og ned," når man kigger på figuren. Endvidere skal det vises, at funktionen $(a, b, c, d) \mapsto (x, y)$ er lineær, og dens standard-matrix-repræsentation skal angives.

Vi vælger at starte midt i opgaven, dvs. vi ønsker at finde temperaturen givet temperaturerne a, b, c og d, og skriver:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3a + 5b + 4y}{3 + 5 + 4} \text{ og} \\ y &= \frac{6c + 4x + 6d}{6 + 4 + 6}, \end{aligned}$$

som let omskrives til:

$$\begin{aligned} 12x - 4y &= 3a + 5b \\ -4x + 16y &= 6c + 6d. \end{aligned}$$

Dette ligningssystem kan repræsenteres vha. matricen

$$\left[\begin{array}{cc|cccc} 12 & -4 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 16 & 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right] \tag{1}$$

Nu er det i midlertid x og y, vi ønsker at finde som funktion af a, b, c og d, så vi vil gerne have identitetsmatricen stående på venstre side i (1). Vi finder den inverse til $\left[\begin{smallmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 16 \end{smallmatrix}\right]$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 12 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 16 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \frac{1}{44} \left[\begin{array}{cc|cc} 44 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 44 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Dvs. $\left[\begin{smallmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 16 \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \frac{1}{44}\left[\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$, og dermed kan det ligningssystem, vi ønsker at løse, reduceres til:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|cccc} 12 & -4 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 16 & 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cccc} 44 & 0 & 12 & 20 & 6 & 6 \\ 0 & 44 & 3 & 5 & 18 & 18 \end{array}\right] \tag{2}$$

Således har vi

$$
\begin{aligned}
44x &= 12a + 20b + 6c + 6d &\iff&& x &= \frac{3}{11}a + \frac{5}{11}b + \frac{3}{22}c + \frac{3}{22}d \\
44y &= 3a + 5b + 18c + 18d &\iff&& x &= \frac{3}{44}a + \frac{5}{44}b + \frac{9}{22}c + \frac{9}{22}d.
\end{aligned}
$$

Havde vi været endnu smartere, havde vi blot direkte udfra (2) have skrevet:

$$
\frac{1}{44}\begin{bmatrix} 12 & 20 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 18 & 18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{5}{11} & \frac{3}{22} & \frac{3}{22} \\ \frac{3}{44} & \frac{5}{44} & \frac{9}{22} & \frac{9}{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{3}
$$

Hermed er det jf. Sætning 3.5 i [LA] vist at $(a, b, c, d) \mapsto (x, y)$ er lineær. Vi kan endvidere fra midterste udtryk i (3) aflæse standard-matrix-repræsentationen:

$$
\begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{5}{11} & \frac{3}{22} & \frac{3}{22} \\ \frac{3}{44} & \frac{5}{44} & \frac{9}{22} & \frac{9}{22} \end{bmatrix}
$$

Vi mangler altså blot at svare på det første spørgsmål: Hvad er (x, y) givet $(20, 10, 20, 10)$? Svaret er:

$$
\frac{1}{44}\begin{bmatrix} 12 & 20 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 18 & 18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{155}{11} \\ \frac{325}{22} \end{bmatrix}
$$

□

Morten Grud Rasmussen
29. september, 2005