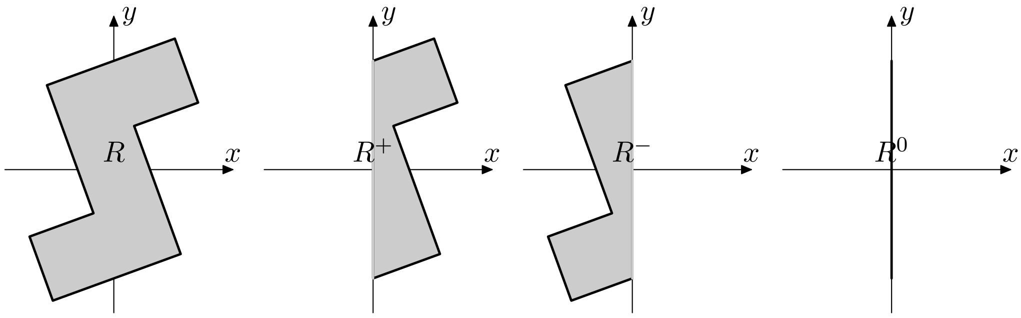
Integraler over symmetriske arealer

Jeg vil i denne note nævne fire typer funktioner, der hver især integrerer til nul, når arealet, der integreres over, opfylder visse symmetrikrav. Jeg vil ikke give stringente beviser for, at det er tilfældet, men dog give heuristiske argumenter herfor, som kan bruges, hvis I selv skulle få lyst til at lave rigtige beviser.

1. type: $f(-x,-y) = -f(x,y)$**:**
Hvis $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ opfylder, at $f(-x,-y) = -f(x,y)$, så vil integraler over et areal R, der opfylder, at R er lig med sig selv roteret 180° omkring origo, være lig nul. Dette skyldes, at funktionen, der sender (x,y) ind i $(-x,-y)$ svarer til en rotation på 180°, og deler vi derfor eksempelvis R op i den del af R, der har positive x-værdier, $R^+ = \big\{(x,y) \in R \,\big|\, x > 0\big\}$, den del, der har negative x-værdier, $R^- = \big\{(x,y) \in R \,\big|\, x < 0\big\}$ og den del, der har $x = 0$, $R^0 = \big\{(x,y) \in R \,\big|\, x = 0\big\}$, så får vi:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R^-} f(x,y)dA + \iint_{R^+} f(x,y)dA + \iint_{R^0} f(x,y)dA$$

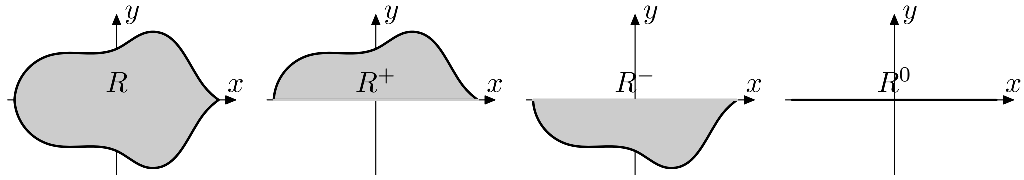
Her er $\iint_{R^-} f(x,y)dA = -\iint_{R^+} f(x,y)dA$, da hvert punkt (x,y) i R^+ svarer til et punkt $(-x,-y)$ i R^- og omvendt. Da $f(-x,-y) = -f(x,y)$, er integralet over R^- altså lig med minus integralet over R^+. Tilbage er integralet over R^0. Men alle punkter i R^0 er på formen $(0,y)$, og da $(0,y) \in R^0$ hvis og kun hvis $(0,-y) \in R^0$, og da $f(0,-y) = f(-0,-y) = -f(0,y)$, er dette integral også nul. altså er $\iint_R f(x,y)dA = 0$.



2. type: $f(-x,y) = -f(x,y)$**:**
Hvis $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ opfylder, at $f(-x,y) = -f(x,y)$, så vil integraler over et areal R, der opfylder, at R er symmetrisk omkring x-aksen, være lig nul. Deler vi R op i $R^+ = \big\{(x,y) \in R \,\big|\, y > 0\big\}$, $R^- = \big\{(x,y) \in R \,\big|\, y < 0\big\}$ og $R^0 = \big\{(x,y) \in R \,\big|\, y = 0\big\}$ så er:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R^-} f(x,y)dA + \iint_{R^+} f(x,y)dA + \iint_{R^0} f(x,y)dA$$

Da $f(0,y) = f(-0,y) = -f(0,y)$ er f identisk nul på R^0, da nul typisk er det eneste tal a, der opfylder, at $a = -a$, og som før ses det, at $\iint_{R^-} f(x,y)dA = -\iint_{R^+} f(x,y)dA$.



3. type: $f(x,-y) = -f(x,y)$**:**
Hvis $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ opfylder, at $f(x,-y) = -f(x,y)$, så vil integraler over et areal R, der opfylder, at R er symmetrisk omkring y-aksen, være lig nul. Deler vi R op i $R^+ = \{(x,y) \in R \,|\, x > 0\}$, $R^- = \{(x,y) \in R \,|\, x < 0\}$ og $R^0 = \{(x,y) \in R \,|\, x = 0\}$ så er:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R^-} f(x,y)dA + \iint_{R^+} f(x,y)dA + \iint_{R^0} f(x,y)dA$$

Da $f(x,0) = f(x,-0) = -f(x,0)$ er f identisk nul på R^0, da nul typisk er det eneste tal a, der opfylder, at $a = -a$, og som før ses det, at $\iint_{R^-} f(x,y)dA = -\iint_{R^+} f(x,y)dA$.

4. type: $f(-x,y) = f(x,-y) = -f(x,y)$**:**
Hvis $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ opfylder, at $f(-x,y) = f(x,-y) = -f(x,y)$, så vil integraler over et areal R, der opfylder, at R enten er symmetrisk omkring x-aksen eller y-aksen, være lig nul, da f i så fald både er af 2. og 3. type.

For at finde eksempler på de forskellige situationer, kan I blot kigge på nogle af de TØ-opgaver, vi har haft. I kan selvfølgelig også selv konstruere nogle, forskellige sammensætninger af $x, y, \cos(x), \cos(y), \sin(x)$ og $\sin(y)$ er udemærkede udgangspunkter, evt. i potenser.

Der er ikke noget avanceret, smart eller odiøst over det her, og de forskellige typer er ligesom de såkaldte „type 1“ og „type 2“ integraler fuldstændigt arbitrære, man kunne lige så godt have kaldt dem type 17 til 20 eller kigget på funktioner, der integreret over arealer, der er symmetriske omkring linjen $y = 17x + \pi$, gav nul, og hele pointen er sådan set bare, at det er en god idé, at lære at tænke i de her baner, hvor man ved en eller anden symmetribetragtning reducerer problemet til noget dybt trivielt. Af samme grund kan I naturligvis heller ikke henvise til denne note til Calculus-eksamen, men I kan med disse fuldstændigt oplagte ideer i tankerne muligvis løse visse opgaver lettere. Så sådan er det altså.

Morten Grud Rasmussen
4. januar 2005