1 Om funktioner

1.1 Hvad er en funktion?

Man lærer allerede om funktioner i folkeskolen, hvor funktioner typisk bliver introduceret som "maskiner," der tager et tal ind, og spytter et tal ud. Dette er også fint langt hen ad vejen, men det er ikke nok, slet ikke når vi kommer op på et tilstrækkeligt højt niveau.

Jeg vil nu forsøge at give en præcis definition af, hvad en funktion er:

Lad A og B være to ikke-tomme mængder. Betragt mængden $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$, dvs. mængden af alle ordnede par (a,b), hvorom det gælder, at $a \in A$ og $b \in B$. En *funktion* eller *afbildning* f fra A til (eller ind i) B (skrives $f\colon A \to B$), er en delmængde $f \subset A \times B$, som opfylder betingelserne

$$(x,y) \in f \wedge (x,z) \in f \Rightarrow y = z \tag{1.1}$$

og

$$\forall x \in A \exists y \in B\colon (x,y) \in f. \tag{1.2}$$

Disse betingelser skal lige have en kommentar med på vejen. (1.1) sikrer, at hvis vi skriver $f(x)$ for y, når $(x,y) \in f$, dvs. $(x,y) = \big(x, f(x)\big)$, så bliver $f(x)$ entydigt bestemt. (1.2) er lige så meget et krav på A, som det er på f, idet vi ved at vælge en anden (ikke-tom) mængde A', altid vil være i stand til at opfylde (1.2); i bund og grund kræver den blot, at A skal være lig f's definitionsmængde, og er blot med, for at gøre definitionen mindre kringlet.

Mængden A kaldes f's *domæne* eller *definitionsmængde*. Mængden $R = \{y \in B \mid \exists x \in A\colon (x,y) \in f\} = \{f(x) \in B \mid x \in A\}$ kaldes f's *billede*, mens B er f's *værdimængde*. Generelt vil $R \subseteq B$, men $R = B$ gælder kun i specielle tilfælde. R skrives også ofte $\mathrm{Im}(f)$ eller $f(A)$, jf. konventionen, at $f(C) = \{f(x) \in B \mid x \in C\}$, hvor $C \subseteq A$. Her kaldes $f(C)$ for *billedet* af C under f.

Denne definition kan – indrømmet – se lidt langhåret ud, men det er samtidig den eneste rigtige definition på en funktion. Nogle af jer vil sandsynligvis være med på det hele, men i tilfældet at I ikke alle er, vil jeg her gennemgå de enkelte elementer for at forklare deres betydning.

Lad altså $f\colon A \to B$ være givet. Indholdet af dette er, at vi nu har et navn på funktionen, f, vi ved hvad funktionens domæne er; A, og vi ved hvad funktionens ko-domæne er; B.

Man kan sagtens have en funktion, der ikke har noget navn, eksempelvis er der i [LA] Opg. 3.3 en funktion, der spejler planen i y-aksen, som blot blev beskrevet ved $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (-x, y)$. Om man giver sin funktion et navn, bestemmer man selv; nogle gange er det overflødigt, men oftest er det mest praktisk.

A'et i $f\colon A \to B$ fortæller, at til ethvert element $x \in A$ findes ét element $f(x)$, som vi kalder *funktionsværdien* i x.

B'et i $f\colon A \to B$ fortæller, at $f(x) \in B$ for alle $x \in A$, altså at funktionsværdier er elementer i B. Dette er *ikke* det samme som, at alle elementer i B er funktionsværdier.

En funktion f er ikke bestemt, før vi ved, hvad dens domæne og dens ko-domæne er. Men den er heller ikke bestemt, før vi ved, hvordan $f \subset A \times B$ ser ud. Ofte gøres dette ved, at man giver en opskrift på hvordan man givet $x \in A$ finder $f(x) \in B$. Dette kan gøres på flere måder, hvis det overhovedet er muligt. Der findes funktioner, som har nogle bestemte egenskaber, og som man kan bevise eksisterer, men hvor man ikke er i stand til at regne en eneste funktionsværdi ud.

De funktioner, I kommer til at beskæftige jer med i Calculus 1 & 2, vil dog oftest – om ikke altid – være bestemt ud fra en *funktionsforskrift*. Hvis vi vender tilbage til eksemplet fra Opg. 3.3 i [LA], og kalder funktionen for f, domænet for A og ko-domænet for B, så kan samme indhold formuleres på følgende måde:

Betragt afbildningen $f\colon A = \mathbb{R}^2 \to B = \mathbb{R}^2$, der består i "spejling i y-aksen," altså $f\colon (x, y) \mapsto (-x, y)$.

Her er funktionsforskriften givet ved $f\colon (x, y) \mapsto (-x, y)$. Dette kan læses: "$f$ sender (x, y) ind i $(-x, y)$." Uden "$f\colon$ "-delen kunne det læses: "(x, y) sendes ind i $(-x, y)$." I begge tilfælde er $(x, y) \in A$ og $(-x, y) \in B$, hvor A og B "tilfældigvis" er ens. Derfor vil man sommetider også se det hele komprimeret til $f\colon A \ni (x, y) \mapsto (-x, y) \in B$, som både fortæller hvor f går fra og til, og hvad dens forskrift er. En anden måde at skrive funktionen på ville være $f\colon A \to B$, $f(x, y) = (-x, y)$, hvor funktionsforskriften naturligvis er $f(x, y) = (-x, y)$.

1.2 Hvorfor er domæne og ko-domæne vigtige?

Umiddelbart kan det virke tåbeligt, at man nødvendigvis skal oplyse domæne og ko-domæne. I vil muligvis også indvende, at eksempelvis [S] da også oftest undlader denne del. Dette skyldes flere ting: En grund er, at ofte er domæne og ko-domæne underforstået ud fra funktionsforskriften, og derfor overflødig. En anden grund er, at de egenskaber ved en funktion, der afhænger af domæne og ko-domæne, ikke altid er relevante for den specifikke opgave. En tredje grund er, at man af pædagogiske årsager vil vente med nogle af matematikkens mere formelle sider, og hellere vil starte blødt ud med en mere intuitiv forståelse for funktionsbegrebet.

I har nu engang valgt at læse matematik, og min holdning er derfor, at I ligeså godt med det samme kan få præsenteret, hvad der er rigtigt. I kan så selv vælge, om I vil tage det til efterretning med det samme, eller om I vil vente, til jeres studium kræver det. Betragt det som et tilbud.

Jeg har nævnt, at nogle egenskaber ved en funktion afhænger af domæne og ko-domæne. De tre vigtigste, som i muligvis også kender fra gymnasiet, er *injektivitet*, *surjektivitet* og *bijektivitet*.

En funktion $f\colon A \to B$ er *injektiv* (også kaldet *én-til-én* eller det mere gammeldags *en-entydig*) såfremt den opfylder følgende:

$$\forall x, y \in A\colon f(x) = f(y) \Rightarrow x = y. \tag{1.3}$$

En funktion $f\colon A \to B$ er *surjektiv* (eller *på*) såfremt den opfylder følgende:

$$\forall y \in B \exists x \in A\colon y = f(x). \tag{1.4}$$

En funktion $f\colon A \to B$ er *bijektiv* såfremt den er både injektiv og surjektiv.

Da

$$\begin{aligned} &\forall x, y \in A\colon f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \\ &\Updownarrow \\ &\forall x, y \in A\colon x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \end{aligned}$$

er en funktion altså injektiv, såfremt funktionsværdier for forskellige punkter er forskellige. Dette betyder, at givet $b \in B$ har ligningen $f(x) = b$ højst én løsning.

(1.4) udtrykker, at til ethvert element y i ko-domænet B eksisterer (mindst) et element x i domænet A, så $f(x) = y$. Med andre ord: ko-domænet B er lig med billedmængden $f(A)$. Dette betyder, at givet $b \in B$ har ligningen $f(x) = b$ mindst en løsning.

At en funktion er bijektiv betyder dermed, at alle punkter rammes, og at funktionsværdier for forskellige punkter er forskellige, med andre ord, at der til ethvert element y i ko-domænet B eksisterer *netop* ét element x i domænet A, således at $y = f(x)$. I dette tilfælde er det muligt at definere en ny funktion $g\colon B \to A$, således at $g \circ f\colon A \to A$ er identiteten[1] på A, og $f \circ g\colon B \to B$ er identiteten på B. Vi kalder g for f's inverse, og skriver $g = f^{-1}$.

Til denne skrivemåde skal knyttes en advarsel! Generelt skriver man $f^{-1}(D)$ for mængden $\{x \in A \mid f(x) \in D\}$, altså mængden af de punkter i A, som f sender ind i D, for alle delmængder $D \subseteq B$, også selvom f *ikke* er surjektiv. Her kaldes $f^{-1}(D)$ for *ur-billedet* af D under f. Er D en et-punkts-mængde, $D = \{y\}$, driver dovenskaben ofte folk ud i at skrive $f^{-1}(y)$ for $f^{-1}(D)$. Dette er uheldigt af flere grunde.

Antag først, at f er bijektiv. Så er $f^{-1}(y)$ et element, mens $f^{-1}(D)$ er *et-punkts-mængden bestående af $f^{-1}(y)$*, nemlig $\{f^{-1}(y)\}$.

Antag nu, at $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved $f\colon x \mapsto x^2$. Så er f ikke bijektiv, og der eksisterer derfor ikke en invers funktion, f^{-1}. Dette skal dog ikke forhindre os i at skrive $f^{-1}(y)$, hvormed vi i virkeligheden mener $f^{-1}(\{y\})$, hvor $y \in \mathbb{R}$. Det betyder, at $f^{-1}(0)$ *ikke* er 0, men $\{0\}$, mens vi for $y > 0$ får $f^{-1}(y) = \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$, og for $y < 0$ får $f^{-1}(y) = \emptyset$.

Ændrer vi nu lidt på funktionen, idet vi bevarer forskriften, men ændrer både domæne og ko-domæne til $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, er f pludselig bijektiv, og $f^{-1}(0)$ er nu lig 0, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ for $y > 0$, og $f^{-1}(y)$ er udefineret for $y < 0$. Man skal altså være påpasselig med denne notation.

Nogle vil måske spørge, hvorfor man ikke blot altid sætter ko-domænet til at være $f(A)$, altså $f\colon A \to f(A)$, så f bliver surjektiv. Det korte svar er: Vent og se! :-)

Nogle gange er man interesseret i at tage en funktion $f\colon A \to B$ og begrænse den til kun at være defineret på en delmængde C af A. Man får da en ny funktion, som man ofte betegner $f|_C$, som går fra C ind i B, og som stemmer overens med f der, hvor de begge er definerede, dvs. $\forall x \in C\colon f(x) = f|_C(x)$.

Eksempelvis kan man, hvis man har en surjektiv funktion $f\colon A \to B$, altid lave en ny funktion $f|_C\colon C \to B$, som er bijektiv. Betragter vi for eksempel $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto x^2$, kan vi tage $f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$. Overvej selv, hvordan de "inverse" trigonometriske funktioner, arcsin, arctan og arccos, fremkommer.

[1] Hvis nogen skulle være i tvivl om, hvad "identiteten på X" betyder, kan jeg oplyse at det blot er funktionen $X \to X$, $x \mapsto x$, altså funktionen, der går fra X ind i X og sender elementer ind i sig selv. Identiteten på X skrives ofte Id_X.

1.3 Forskellige egenskaber ved funktioner

Sammensætning af funktioner er associativ.

Lad nemlig $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ og $h\colon C \to D$. Så er det klart, at vi kan danne $g \circ f\colon A \to C$ og $h \circ g\colon B \to D$. Men dermed er det også klart, at vi kan danne $(h \circ g) \circ f\colon A \to D$ og $h \circ (g \circ f)\colon A \to D$. I midlertid er begge disse afbildninger givet ved $A \ni x \mapsto h(g(f(x))) \in D$, og altså er $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, og funktionssammensætning er dermed associativ.

En funktion har en venstreinvers[2] *hvis og kun hvis den er injektiv.*

Lad $f\colon A \to B$ være injektiv. Vi skal vise, at der findes en funktion $v\colon B \to A$, så $v \circ f = \mathrm{Id}_A$. Da f er injektiv, er $\tilde{f}\colon A \to f(A), \quad x \mapsto f(x)$ bijektiv, idet $\tilde{f}$ stemmer overens med f, og derfor er injektiv, og da $\tilde{f}(A) = f(A)$, og $\tilde{f}$ dermed er surjektiv. Altså har den en invers, $\tilde{f}^{-1}\colon f(A) \to A$. Vælg nu et vilkårligt element $a \in A$, og sæt

$$v(x) = \begin{cases} \tilde{f}^{-1}(x) & \text{for } x \in f(A) \\ a & \text{for } x \in B \setminus f(A) \end{cases} \tag{1.5}$$

Det er nu klart, at $v \circ f = \mathrm{Id}_A$.

Lad nu $f\colon A \to B$ være givet, og antag, at den har en venstreinvers $v\colon B \to A$. Vi skal vise, at f er injektiv. Antag for modstrid, at f ikke er injektiv, dvs. der findes $x, y \in A\colon x \neq y \wedge f(x) = f(y)$. Sæt $b = f(x) = f(y)$. Da $v \circ f = \mathrm{Id}_A$ og $x \neq y$ må $v(b) = v \circ f(x) = \mathrm{Id}_A(x) = x \neq y = \mathrm{Id}_A(y) = v \circ f(y) = v(b)$, men dette er en modstrid. Altså må f være injektiv.

En funktion har en højreinvers[3] *hvis og kun hvis den er surjektiv.*

Lad $f\colon A \to B$ være surjektiv. Vi skal vise, at der findes en funktion $h\colon B \to A$, så $f \circ h = \mathrm{Id}_B$. Idet f er surjektiv findes for ethvert $b \in B$ mindst én løsning $a \in A$ til ligningen $b = f(x)$. Sættes nu

$$h(b) = c, \text{ hvor } c \in \left\{ a \in A \,\middle|\, b = f(a) \right\}, \tag{1.6}$$

altså $h(b)$ defineres til at være én af løsningerne til $b = f(x)$, så vil $f \circ h = \mathrm{Id}_B$.

Lad nu $f\colon A \to B$ være givet, og antag, at den har en højreinvers. Vi skal vise, at så er f surjektiv. Antag for modstrid, at f ikke er surjektiv, dvs.

[2] *En venstreinvers til en funktion $f\colon A \to B$ er en funktion $v\colon B \to A$ som opfylder, at $v \circ f = \mathrm{Id}_A$.*

[3] *Hvis du bruger din sunde fornuft, og læser definitionen på en venstreinvers, skulle du være i stand til at definere en højreinvers.*

$f(A) \neq B$. Så vil $B = \mathrm{Id}_B(B) = f \circ h(B) = f(h(B)) \subseteq f(A) \neq B$, idet $h(B) \subseteq A$, altså modstrid.

Ovenstående beviser viser, at venstreinverser hhv. højreinverser ikke nødvendigvis er entydigt bestemt, idet vi i (1.5) kunne have valgt et andet vilkårligt element $a' \in A$ i stedet for a, uden det havde ændret på konklusionen, og tilsvarende kunne vi i (1.6) have valgt en anden løsning c' til ligningen $b = f(x)$ (i hvert fald i de tilfælde hvor der var mere end én løsning, dvs. i tilfældet hvor f ikke også er injektiv, og dermed bijektiv.) Altså bør man tale om *en venstreinvers* hhv. *en højreinvers*, fremfor venstreinvers*en* hhv. højreinvers*en*.

En bijektiv funktion har netop én funktion, som både er dens venstre- og højreinverse.

Antag at $f\colon A \to B$ er bijektiv. Så viser ovenstående, at f har en venstre- og en højreinvers. Kald disse hhv. v og h. Associativiteten af funktionssammensætninger giver endvidere, at $v = v \circ \mathrm{Id}_B = v \circ (f \circ h) = (v \circ f) \circ h = \mathrm{Id}_A \circ h = h$. Antag, at v' og h' er andre venstre- hhv. højreinverse. Da giver tilsvarende udregninger, at $v' = h = v$ og $h' = v = h$. Dermed er der netop én funktion, som både er den venstre- og den højreinverse, og denne funktion er lig den inverse.

2 Lineære afbildninger

2.1 Hvad er en lineær afbildning?

En *lineær afbildning* f er en funktion fra et vektorrum V ind i et andet W, som opfylder, at

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \underline{u} \in V\colon f(a \cdot \underline{u}) = a \cdot f(\underline{u}) \text{ og} \tag{2.1}$$

$$\forall \underline{u}, \underline{v} \in V\colon f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v}) \tag{2.2}$$

(2.1) og (2.2) er ensbetydende med

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \underline{u}, \underline{v} \in V\colon f(a \cdot \underline{u} + b \cdot \underline{v}) = a \cdot f(\underline{u}) + b \cdot f(\underline{v}), \tag{2.3}$$

så om man bruger (2.1) og (2.2) eller (2.3) er ligegyldigt. Pointen med lineære afbildninger er, at de bevarer lineære operationer (dvs. addition og skalarmultiplikation).

2.2 Hvordan viser man, at noget er en lineær afbildning?

Det er i grunden såre simpelt at vise, at noget er en lineær afbildning. Man skal blot tjekke, at enten (2.1) og (2.2) eller (2.3) er opfyldt. Jeg vil nu demonstrere ved hjælp af vores yndlingseksempel, Opg. 3.3 i [LA]:

Lad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved $f\colon (x,y) \mapsto (-x,y)$. Vi skal vise at f er lineær, og vælger at benytte (2.1) og (2.2). Lad derfor $a \in \mathbb{R}$ og $\underline{u} = (x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ være givet. Vi skal så vise, at $f\big(a\cdot(x_1,y_1)\big) = a\cdot f\big((x_1,y_1)\big)$:

$$\begin{aligned} f\big(a\cdot(x_1,y_1)\big) &= f\big((ax_1,ay_1)\big) \\ &= (-ax_1,ay_1) \\ &= a\cdot(-x_1,y_1) \\ &= a\cdot f\big((x_1,y_1)\big), \end{aligned}$$

altså er $f\big(a\cdot(x_1,y_1)\big) = a\cdot f\big((x_1,y_1)\big)$.

Lad nu $\underline{u} = (x_1,y_1), \underline{v} = (x_2,y_2) \in V$ være givet. Vi skal vise, at $f\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big) = f\big((x_1,y_1)\big) + f\big((x_2,y_2)\big)$:

$$\begin{aligned} f\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big) &= f\big((x_1+x_2,y_1+y_2)\big) \\ &= \big(-(x_1+x_2),y_1+y_2\big) \\ &= (-x_1-x_2,y_1+y_2) \\ &= (-x_1,y_1)+(-x_2,y_2) \\ &= f\big((x_1,y_1)\big)+f\big((x_2,y_2)\big). \end{aligned}$$

Altså er f lineær.

2.3 Lineære afbildninger og matricer

Det er nemt at vise, at hvis $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, og $f\colon V \to W$, så er f lineær hvis og kun hvis der findes en entydig matrix $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, så $f(\underline{u}) = \mathbf{A}\underline{u}$.

Antag først at $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er lineær. Lad $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ være givet. Lad $\underline{e}_i, \quad i = 1,\ldots,n$ være standardbasisvektorerne i $\mathbb{R}^n$. Så findes entydigt bestemte tal $u_1,u_2,\ldots,u_n \in \mathbb{R}$, således at $\underline{u} = u_1\cdot\underline{e}_1+u_2\cdot\underline{e}_2+\cdots+u_n\cdot\underline{e}_n$. Da f er lineær, er $f(\underline{u}) = f(u_1\cdot\underline{e}_1+u_2\cdot\underline{e}_2+\cdots+u_n\cdot\underline{e}_n) = u_1\cdot f(\underline{e}_1)+u_2\cdot f(\underline{e}_2)+\cdots+u_n\cdot f(\underline{e}_n)$.

Hvis vi nu definerer matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ f(\underline{e}_1) & f(\underline{e}_2) & \cdots & f(\underline{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

som ligger i $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, da den har n søjler, og f går ind i $\mathbb{R}^m$, og $f(\underline{e}_i)$ derfor er vektorer i $\mathbb{R}^m$, så er $f(\underline{u}) = \mathbf{A}\underline{u}$ jf. ovenstående udregninger. Vælger vi nu $\underline{u}$, så $u_i = 0$ for $i \neq j$, $u_j = 1$, ser vi, når j gennemløber tallene $1, \dots, n$, at matricen $\mathbf{A}$ er den eneste, der opfylder $f(\underline{u}) = \mathbf{A}\underline{u}$.

Antag nu, at $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er på formen $f(\underline{u}) = \mathbf{A}\underline{u}$, $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$. Vi skal vise, at f er lineær. Lad derfor $a \in \mathbb{R}$ og $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ være givet. Så skal vi vise, at $f(a \cdot \underline{u}) = a \cdot f(\underline{u})$, jf. (2.1):

$$\begin{aligned} f(a \cdot \underline{u}) &= \mathbf{A}(a \cdot \underline{u}) \\ &= a \cdot \mathbf{A}\underline{u} \\ &= a \cdot f(\underline{u}). \end{aligned}$$

Lad $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ være givet. Så skal vi vise, at $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$, jf. (2.2):

$$\begin{aligned} f(\underline{u} + \underline{v}) &= \mathbf{A}(\underline{u} + \underline{v}) \\ &= \mathbf{A}\underline{u} + \mathbf{A}\underline{v} \\ &= f(\underline{u}) + f(\underline{v}). \end{aligned}$$

Altså er f lineær.

Nogle af de regneregler jeg har brugt ovenfor, har jeg ikke umiddelbart kunnet finde i [LA]. De er ikke særligt svære at vise, og hvis I gider, ville det være en god øvelse selv at vise disse.

En af pointerne med at vise ovenstående er, at den generelle metode til at finde matricen for en lineær afbildning fremkommer helt naturligt. Metoden kan nemlig ses i (2.4). Det (2.4) udtrykker, er lige præcis, at hvis man skal finde matricen for en lineær afbildning, så er det nok at tjekke hvad afbildningen gør på standardbasisvektorerne, og så skrive resultatet af dette op i en matrix. Som eksempel tager vi nu matricen $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right]$ fra Opg. 3.3 i [LA], yndlingseksemplet, I ved:

Tag $\underline{e}_1 = (1, 0)$. Tjek hvad $(x, y) \mapsto (-x, y)$ gør ved $\underline{e}_1$: $\underline{e}_1 \mapsto (-1, 0) = (a_{11}, a_{21})$. Altså er $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} -1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{smallmatrix}\right]$, hvor a_{12} og a_{22} endnu er ukendte. Tjek nu, hvad der sker med $\underline{e}_2 = (0, 1)$: $\underline{e}_2 \mapsto (0, 1)$. Altså er $(a_{12}, a_{22}) = (0, 1)$, og dermed er matricen for afbildningen $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Morten Grud Rasmussen
1. september 2005