Besvarelse til [S] Opg. A.I.49 fra US 7

[S] Opg. A.I.49
Hvis $u(x) = f(x) + ig(x)$ er en kompleks funktion (dvs. antager komplekse værdier) af en reel variabel x, og f og g er differentiable, reelle funktioner (dvs. er differentiable og antager reelle værdier) *definerer* vi den afledte af u til at være $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$.

Equation 7, side A81 i [S] er følgende identitet:

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Vi skal ud fra dette vise, at hvis $F(x) = e^{rx}$, så er $F'(x) = re^{rx}$, når r er et komplekst tal.

Med andre ord skal vi finde differentiable, reelle funktioner f og g af én reel variabel, således at $F(x) = f(x) + ig(x)$, og vise, at $f'(x) + ig'(x)$ kan omskrives til re^{rx}.

Vi starter med at finde de reelle funktioner f og g. Vi vælger $a, b \in \mathbb{R}$ således, at $r = a + bi$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= e^{rx} \\
&= e^{(a+bi)x} \\
&= e^{ax+bix} \\
&= e^{ax}e^{bix} \\
&= e^{ax}\big(\cos(bx) + i\sin(bx)\big) \\
&= e^{ax}\cos(bx) + ie^{ax}sin(bx) \\
&= f(x) + ig(x),
\end{aligned}$$

hvor $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$ og $g(x) = e^{ax}\sin(bx)$ klart er reelle som funktion af en reel variabel x. Hvis vi differentierer f og g fås:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= ae^{ax}\cos(bx) - be^{ax}\sin(bx) \\
g'(x) &= ae^{ax}\sin(bx) + be^{ax}\cos(bx)
\end{aligned}$$

Nu skal vi altså vise, at vi kan omskrive $f'(x) + ig'(x)$ til re^{rx}:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= f'(x) + ig'(x) \\
&= ae^{ax}\cos(bx) - be^{ax}\sin(bx) + i\big(ae^{ax}\sin(bx) + be^{ax}\cos(bx)\big) \\
&= ae^{ax}\big(\cos(bx) + i\sin(bx)\big) + be^{ax}\big(-\sin(bx) + i\cos(bx)\big) \\
&= ae^{ax}\big(\cos(bx) + i\sin(bx)\big) + bie^{ax}\big(i\sin(bx) + \cos(bx)\big) \\
&= ae^{ax}\big(\cos(bx) + i\sin(bx)\big) + bie^{ax}\big(\cos(bx) + i\sin(bx)\big) \\
&= (a+bi)e^{ax}\big(\cos(bx) + i\sin(bx)\big) \\
&= re^{ax}\big(\cos(bx) + i\sin(bx)\big) \\
&= re^{ax}e^{ibx} \\
&= re^{ax+ibx} \\
&= re^{ax+bix} \\
&= re^{(a+bi)x} \\
&= re^{rx}
\end{aligned}$$

$\square$

Håber der er mellemregninger nok. Ellers kom og spørg.

Morten Grud Rasmussen
28. oktober 2004