Besvarelse til [S] Opg. A.I.49 fra US 7

[LA] Opg. 6.1
Vi skal angive den fuldstændige løsning til følgende ligningssystem:

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 4 \\ 4x + 5y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

Dette ligningssytem kan repræsenteres af følgende matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

Denne matrix vil vi nu reducere til reduceret række-echelonform:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 6 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4-1\cdot 4 & 5-3\cdot 4 & 2-2\cdot 4 & 6-4\cdot 4 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{10}{7} \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1-0\cdot 3 & 3-1\cdot 3 & 5-\frac{6}{7}\cdot 3 & 4-\frac{10}{7}\cdot 3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{10}{7} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{10}{7} \end{array}\right] \end{aligned}$$

Oversætter vi nu tilbage, fås følgende:

$$\begin{aligned} x + 0y - \frac{4}{7}z &= -\frac{2}{7} \quad &\Longleftrightarrow \quad x &= \frac{4}{7}z - \frac{2}{7} \\ 0x + y + \frac{6}{7}z &= \frac{10}{7} \quad &\Longleftrightarrow \quad y &= \frac{10}{7} - \frac{6}{7}z \end{aligned}$$

Altså er løsningen alle x, y, z, der opfylder, at $(x, y, z) = (\frac{2}{7}, \frac{10}{7}, 0) + t\cdot(\frac{4}{7}, \frac{6}{7}, 1)$ for et eller andet $t \in \mathbb{R}$.

[LA] Opg. 6.2
Vi skal finde samtlige løsninger til følgende ligningssystem:

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 4 \\ 4x + 5y + 2z &= 6 \\ 2x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Dette ligningssytem kan repræsenteres af følgende matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Intet kan hindre mit skarpe blik i at genkende de første to ligninger som dem, vi havde i Opg. 6.1! Dette gør reductionen lidt nemmere, idet vi allerede ved at:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{10}{7} \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Vi trækker nu første linje 2 gange fra nederste, og anden linje 1 gang fra nederste, og får:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{7} & 4 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & 6 \\ 0 & 0 & 3 - \frac{2\cdot(-4)}{7} - \frac{6}{7} & 1 - \frac{2\cdot(-2)}{7} - \frac{10}{7} \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{7} & 4 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{23}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{7} & 4 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{23} \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{23} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{32}{23} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{23} \end{array}\right] \end{aligned}$$

Vi ser altså, at løsningen er $x = -\frac{6}{23}, y = \frac{32}{23}, z = \frac{1}{23}$. Man bør i øvrigt lægge mærke til, at denne jo naturligvis også er en løsning til ligningssystemet i Opg. 6.1. Denne løsning svarer til værdien $t = \frac{1}{23}$.

[LA] Opg. 6.5

Vi skal finde en funktion f på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$, der opfylder, at $f(1) = 1$ og $f(2) = 3$. Derefter skal vi finde alle sådanne funktioner. Vi starter bagfra og finder alle løsninger først, og vælger derefter en vilkårlig ud.

Okay, hvad har vi med at gøre? Vi ved, at $f(x) = ax^2 + bx + c$ samt at $f(1) = 1$ og $f(2) = 3$. Sammenholdes de informationer får vi:

$$\begin{aligned} f(1) &= a + b + c = 1 \\ f(2) &= 2^2a + 2b + c = 4a + 2b + c = 3 \end{aligned}$$

Dette er altså et lineært ligningssystem. Vi opstiller ligningssystemets matrix og reducerer:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{aligned}$$

Som før aflæses løsningerne: $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}c$ og $b = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}c$, hvor $c \in \mathbb{R}$ er vilkårlig. Vi skulle finde en konkret løsning, og vælger blot $c = 0$, og dermed $a = b = \frac{1}{2}$.

[S] Opg. 11.3.64(b)

Det er blevet pålagt os at eftervise

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \text{ for } u(x,t) = \frac{t}{a^2t^2 - x^2}.$$

Først laver vi nogle omskrivninger på u:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{t}{a^2t^2 - x^2} \\
&= \frac{t}{(at-x)(at+x)} \\
&= \frac{1}{2a} \cdot \frac{2at}{(at-x)(at+x)} \\
&= \frac{1}{2a} \cdot \frac{2at - x + x}{(at-x)(at+x)} \\
&= \frac{1}{2a} \cdot \frac{at - x + at + x}{(at-x)(at+x)} \\
&= \frac{1}{2a} \left(\frac{at-x}{(at-x)(at+x)} + \frac{at+x}{(at-x)(at+x)} \right) \\
&= \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{at+x} + \frac{1}{at-x} \right) \\
&= \frac{\frac{1}{2a}}{at+x} + \frac{\frac{1}{2a}}{at-x} \\
&= \frac{\alpha}{at+x} + \frac{\beta}{at-x} \text{ for } \alpha = \beta = \frac{1}{2a}
\end{aligned}$$

Sætter vi nu $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$ og $g(x) = -\dfrac{\beta}{x}$ ser vi at $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$, idet

$$f(x+at) + g(x-at) = \frac{\alpha}{x+at} - \frac{\beta}{x-at} = \frac{\alpha}{at+x} + \frac{\beta}{at-x}$$

Da f og g oplagt er to gange differentiable, følger $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ af [S] Opg. 11.3.65.

[S] Opg. 11.3.65

Vi skal vise, at hvis f og g begge er to gange differentiable, så er $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$ en løsning til $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$. Dette gøres blot ved at differentiere løs. Lad derfor f og g være to to gange differentiable funktioner og $u(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \frac{\partial f(x+at)}{\partial x} + \frac{\partial g(x-at)}{\partial x} \\
&= 1 \cdot f'(x+at) + 1 \cdot g'(x-at) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial f'(x+at)}{\partial x} + \frac{\partial g'(x-at)}{\partial x} \\
&= 1 \cdot f''(x+at) + 1 \cdot g''(x-at) \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial f(x+at)}{\partial t} + \frac{\partial g(x-at)}{\partial t} \\
&= a \cdot f'(x+at) - a \cdot g'(x-at) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial\big(af'(x+at)\big)}{\partial t} + \frac{\partial\big(-ag'(x-at)\big)}{\partial t} \\
&= a^2 \cdot f''(x+at) + a^2 \cdot g''(x-at)
\end{aligned}$$

Altså er:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x-at) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

Håber der er mellemregninger nok. Ellers kom og spørg.

Morten Grud Rasmussen
25. september 2005