Analyse 2: Eulers formel

Sebastian Ørsted

29. maj 2015

I DENNE NOTE giver vi et eksempel på, hvorledes det er vigtigt at holde sig for øje, *hvor* de matematiske resultater kommer fra, og *hvad* de baseres på; alternativt er det nemlig muligt at opnå cirkelslutninger (no pun intended). Et klassisk eksempel, hvor denne fejl ofte er set i den matematiske litteratur, er ved udledningen af den berømte *Eulers formel*

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Eulers formel betragtes som ét af de smukkeste resultater i matematikken, idet den blandt andet på elegant vis sammenknytter analysen og geometrien. Som resultat betragtet er formlen dog alt andet end uproblematisk, hvis man ikke holder sig sine definitioner for øje. En fuldstændig argumentation for Eulers formel skal jo principielt skridt for skridt knytte eksponentialrækken sammen med enhedscirklens geometri, hvilket sjældent sker i fuldt omfang i litteraturen. Er man pedantisk nok til at forfølge alle delene af argumentationen tilbage til deres kilder, begynder hullerne endvidere at dukke op.

Jeg har i litteraturen kun set »beviser« for formlen baseret på enten potensrækkeudviklingen af cosinus og sinus eller på de differentialligninger, som cosinus og sinus opfylder. Begge tilgange forudsætter åbenlyst nok, at vi ved, at cosinus og sinus er differentiable funktioner, samt at vi kender deres afledte. At vise dette resultat uden at henvise til Eulers formler er dog mere problematisk end som så. Et sådant bevis må nødvendigvis kunne tilbageføres til den klassiske definition af cosinus og sinus baseret på enhedscirklen i den euklidiske plan, hvilket er overraskende svært at gøre i fuld formalitet. Dertil kommer, at førnævnte definition ligeledes er problematisk, idet den forudsætter, at vi kan give mening til vinklen langs enhedscirklen målt i radianer. Den forudsætter med andre ord, at vi er i stand til at måle afstande langs en cirkel. Definitionen af dette afstandsbegreb tager udgangspunkt i differentialgeometri og anvender en del integralregning, som således forudsættes allerede ved selve definitionen. Endvidere er det i denne sammenhæng altafgørende, at vi kan parametrisere enhedscirklen med en passende glat (dvs. uendeligt ofte differentiabel) kurve. Men det mest oplagte valg af denne glatte kurve er givet ud fra – ja, intet mindre end cosinus- og sinus-funktionerne, som vi netop er i færd med at definere. Ikke alene skal der med denne tilgang altså bruges en del kompliceret matematik for overhovedet at få de anvendte definitioner til at give mening; vi ender også meget let med endnu en cirkelslutning.

En mere tilfredsstillende tilgang, som vi skal forfølge i denne note, er at tage de velkendte formler

$$\cos(z) = \tfrac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \quad \text{og} \quad \sin(z) = \tfrac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \qquad (z \in \mathbb{C})$$

som *definitioner* af cosinus og sinus. De klassiske reelle cosinus- og sinusfunktioner fremkommer nu simpelthen ved at restringere ovenstående funktioner til de reelle tal. Eulers formel som givet herover er derfor med denne definition blot en tautologi. Det resultat, som vi nu står tilbage med og mangler at vise, og som er det egentlige, implicitte udsagn i Eulers formel, er, at disse definitioner af cosinus og sinus også opfylder de sædvanlige formuleringer af disse funktioner ud fra enhedscirklen. Skridtene på denne vej leder os også frem til en præcis definition af tallet π, nemlig som den halve periode af ovenstående funktioner. Under udledningen vil vi forudsætte, at det er kendt, at den komplekse eksponetialfunktioner er kompleks-differentiabel overalt og har sig selv som afledt, samt at formlen

$$\mathrm{e}^z \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{z+w}$$

er gyldig for alle $z, w \in \mathbb{C}$. Vi noterer, at det er et simpelt korollar hertil, at det for alle positive heltal n og alle komplekse tal z gælder, at

$$(\mathrm{e}^z)^n = \underbrace{\mathrm{e}^z \mathrm{e}^z \cdots \mathrm{e}^z}_{n \text{ gange}} = \mathrm{e}^{nz}.$$

Endvidere forudsættes det kendt, at den komplekse eksponentialfunktion spiller smukt sammen med kompleks-konjugation ved

$$\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Alle ovenstående resultater udledes i standardbehandlinger af den komplekse eksponentialfunktion, heriblandt noterne hørende til dette kursus (dog med undtagelse af det udsagn, at eksponentialfunktionen er kompleks-differentiabel – dette formuleres kun ad hoc, men tilgangen er tilstrækkelig for os). Her tages alene udgangspunkt i formlen

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

som til enhver tid bør betragtes som *definitionen* af den komplekse eksponentialfunktion.

* * *

VI BETRAGTER KURVEN $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ givet ved $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Fra definitionerne af cosinus og sinus herover finder vi, at

$$\gamma(t) = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t) \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Endvidere slutter vi fra definitionen af cosinus, at

$$\cos(t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}}{2} = \frac{2\,\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{2} = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$$

for alle $t \in \mathbb{R}$. Specielt er $\cos(t)$ et reelt tal. Tilsvarende overvejelser giver, at $\sin(t) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ er et reelt tal, så ligning (1) faktisk er en opsplitning af γ i dennes real- og imaginærdel. Vi vil derfor i det følgende tillade os at anvende betegnelserne cosinus og sinus for restriktionen af de tidligere indførte komplekse funktioner til funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Vi finder ved differentiation af γ, at

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad \text{dvs.} \quad \cos'(t) + \mathrm{i}\sin'(t) = \mathrm{i}\cos(t) - \sin(t)$$

for alle $t \in \mathbb{R}$. Ved at tage real- og imaginærdele på begge sider fås formlerne $\cos'(t) = -\sin(t)$ og $\sin'(t) = \cos(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$.

Vi noterer indledningsvist nogle vigtige egenskaber ved γ. Vi lader i denne forbindelse

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

betegne den komplekse enhedscirkel.

Lemma 1. *γ antager kun værdier på S^1.*

Bevis. For alle $t \in \mathbb{R}$ gælder, at

$$|\gamma(t)|^2 = \overline{\gamma(t)}\gamma(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t+\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

og det ønskede er vist. □

Lemma 2. *Lad $I = [a, \infty)$ være et interval, og lad $f : I \to \mathbb{R}$ være en differerentiabel funktion. Antag, at både $f(x)$ og $f'(x)$ har en grænseværdi for $x \to \infty$, og at* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *er endelig. Så er* $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Bevis. Antagelserne medfører umiddelbart, at $f(x+1) - f(x) \to 0$ for $x \to \infty$. For fastholdt $x \in I$ giver Middelværdisætningen, at der findes et $s \in (x, x+1)$, så

$$f'(s) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f(x+1) - f(x).$$

Da $f'(x)$ har en grænseværdi for $x \to \infty$, og da s var valgt i $(x, x+1)$, vil denne grænseværdi være 0. □

Lemma 3. *γ er en periodisk funktion.*

Bevis. Det vil være nok at vise, at der findes et reelt tal $\tau > 0$, så $\gamma(\tau) = 1$; thi derefter følger det for alle $t \in \mathbb{R}$, at

$$\gamma(t+\tau) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+\tau)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \cdot 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \gamma(t).$$

Antag derfor for modstrid, at et sådant τ *ikke* findes. Det følger, at der heller ikke kan findes et $\eta > 0$, så $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} = \mathrm{i}$; thi så er

$$\mathrm{e}^{4\eta\mathrm{i}} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta})^4 = \mathrm{i}^4 = 1.$$

Nu er $\sin'(0) = \cos(0) = 1 > 0$ (den sidste lighed følger umiddelbart fra definitionen). Ergo har imaginærdelen af γ strengt positiv afledt i punktet $t = 0$ og er altså monotont voksende. Specielt må γ umiddelbart efter $t = 0$ antage værdier med strengt positiv imaginærdel. Da pr. antagelse γ ikke kan ramme 1 eller i for $t > 0$, giver Mellemværdisætningen, at $\gamma(t)$ må forløbe i første kvadrant for alle $t > 0$, dvs. $\mathrm{Re}(\gamma(t)) > 0$ og $\mathrm{Im}(\gamma(t)) > 0$. Vi slutter, at begge funktioner forløber i $(0, 1)$ for $t > 0$.

Fra ligningerne $\cos' = -\sin$ og $\sin' = \cos$ ser vi, at real- og imaginærdelene af γ er monotont aftagende hhv. voksende. Da de forløber i $(0,1)$, er de endvidere begrænsede og har således en endelig grænseværdi for $t \to \infty$. Med andre ord må

$$\gamma(t) \to p \quad \text{for } t \to \infty$$

for et passende komplekst tal p; grundet lukketheden af S^1, hvor γ forløber, må dette p nødvendigvis ligge herpå. Anvendes Lemma 2 på real- og imaginærdelene af γ, får vi, at $\mathrm{Im}(\gamma(t)) = \mathrm{Re}(\gamma'(t))$ og $\mathrm{Re}(\gamma(t)) = -\mathrm{Im}(\gamma'(t))$ går imod nul for $t \to \infty$. Vi slutter, at $p = 0$, hvilket er i modstrid med, at $p \in S^1$. □

Vi lader $\tau > 0$ være den *mindste* periode for γ (en sådan findes, idet γ er kontinuert og ikke-konstant) og definerer $\pi = \tau/2$. Som i beviset herover overbeviser man sig om, at 2π er minimale strengt positive realtal, hvor γ antager værdien 1.

Sætning 4. *Den 2π-periodiske funktion γ restringerer til en bijektion $[0,2\pi) \to S^1$. Specielt parametriserer γ hele S^1.*

Bevis. Idet der gælder $1 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = (\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}})^2$, er $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$ en kvadratrod til 1. Dem er der kun to af i $\mathbb{C}$, nemlig ± 1, og da 2π er det minimale strengt positive tal, hvor γ antager værdien 1, er $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -1$. Mellemværdisætningen anvendt på den kontinuerte funktion $\mathrm{Re}(\gamma)\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ giver, at denne rammer alle punkter i $[-1,1]$. Samme sætning anvendt på $\mathrm{Im}(\gamma)\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ giver også, at denne må være strengt positiv på $[0,\pi]$; thi den er positiv i et område efter punktet $t = 0$, og hvis den skulle blive negativ også, måtte den ramme punktet 0 for et $t \in (0,\pi)$, hvilket svarer til, at $\gamma(t) = \pm 1$, en umulighed. Da ethvert punkt på

$$S^1_+ = \{z \in S^1 \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$

er entydigt bestemt ud fra sin realdel (dette følger eksempelvis af Pythoagoras), er $\gamma\colon [0,\pi] \to S^1_+$ surjektiv. Hvis z er et punkt i $S^1 \setminus S^1_+$, er $-z \in S^1_+$, så $-z$ har formen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ for passende $t \in [0,\pi]$. Ergo ligger $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = -z$ også i billeder for γ. Vi slutter, at $\gamma\colon [0,2\pi) \to S^1$ er surjektiv.

For at vise injektiviteten bemærker vi, at hvis $s < t$ i $[0,2\pi)$ opfylder $\gamma(s) = \gamma(t)$, så er $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-s)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}/\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} = 1$. Da $t - s \in (0,2\pi)$, er dette en modstrid. Ergo har vi vist det ønskede. □

Det er på nuværende tidspunkt ikke svært at se, at cosinus- og sinusfunktionerne – som netop fremkommer som real- og imaginærdelene af γ – også er periodiske med mindste periode 2π. Med ovenstående resultater på plads er vi klart til at begynde at definere *vinklen* af et punkt på S^1:

Definition 5. *Lad s være et punkt på S^1.* ***Vinklen*** *af s er det entydige $\theta \in [0,2\pi)$, som opfylder $\gamma(\theta) = s$.*

Vi vil nu knytte dette nye begreb om vinklen til det allerede kendte, uformelle begreb. Vi forudsætter i denne forbindelse en smule *differentialgeomtri*. For reelle tal a, b med $a < b$ og en kontinuert differentiabel kurve $\delta\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ definerer vi *længden* af δ som tallet

$$\ell(\delta) = \int_a^b \|\delta'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Det vises i standardbehandlinger af differentialgeometri, at begrebet længde er veldefineret forstået på den måde, at det kun afhænger af billedet $\delta([a,b])$ (i hvert fald så længe vores kurve er injektiv). Hvis en anden injektiv kurve $\tilde{\delta}$ har samme billede, er $\ell(\delta) = \ell(\tilde{\delta})$. Det giver derfor mening at tale om længden af et afsnit af enhedscirklen S^1 uden at specificere en konkret parametrisering.

Vi bemærker, at absolutværdien af den afledte af γ er

$$|\gamma'| = |\mathrm{i}\gamma| = |\gamma| = 1$$

(man siger i dette tilfælde, at γ er en *buelængdeparamtrisering*), Længden af det udsnit af S^1, der kan parametriseres ved at restringere γ til et interval $[0,\theta]$ (med $\theta \in [0,2\pi]$), er derfor

$$\ell\left(\gamma\big|_{[0,\theta]}\right) = \int_0^\theta |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^\theta 1\,\mathrm{d}t = \theta.$$

Sagt lidt uformelt er θ afstanden fra 0 til $\gamma(\theta)$ tilbagelagt langs S^1 med positiv omløbsretning.

For et punkt s på S^1 med vinklen θ gælder nu, at førstekoordinaten (dvs. realdelen) af s netop er $\cos(\theta)$, mens andenkoordinaten (dvs. imaginærdelen) af s netop er $\sin(\theta)$; begge dele følger umiddelbart af, at cosinus og sinus er real- hhv. imaginærdelene af γ. Ergo er denne definition af cosinus og sinus konsistent med den, der tager udgangspunkt i enhedscirklen.

Lad os afslutningsvist notere os, at vores nye, lidt abstrakte definition af π er i overensstemmelse med den, vi troede, vi kendte.

Korollar 6. *Længden af enhedscirklen S^1 er 2π.*