Ikke-standardanalyse og hyperreelle tal

Sebastian Ørsted

Institut for Matematik

9. oktober 2015

Differentiation

Antag, at $u(x)$ ændrer sig du, når x ændrer sig med den infinitesimale værdi $dx > 0$. Så er den *afledte* brøken $\frac{du}{dx}$.

Differentiation

Antag, at $u(x)$ ændrer sig du, når x ændrer sig med den infinitesimale værdi $dx > 0$. Så er den *afledte* brøken $\frac{du}{dx}$.

Sætning 1

Hvis u og v er differentiable, er uv differentiabel, og

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Differentiation

Antag, at $u(x)$ ændrer sig du, når x ændrer sig med den infinitesimale værdi $dx > 0$. Så er den *afledte* brøken $\frac{du}{dx}$.

Sætning 1

Hvis u og v er differentiable, er uv differentiabel, og

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Bevis.

$$d(uv) = (u + du)(v + dv) - uv$$

Differentiation

Antag, at $u(x)$ ændrer sig du, når x ændrer sig med den infinitesimale værdi $dx > 0$. Så er den *afledte* brøken $\frac{du}{dx}$.

Sætning 1

Hvis u og v er differentiable, er uv differentiabel, og

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Bevis.

$$\begin{aligned} d(uv) &= (u + du)(v + dv) - uv \\ &= u\,dv + v\,du + du\,dv \end{aligned}$$

Differentiation

Antag, at $u(x)$ ændrer sig du, når x ændrer sig med den infinitesimale værdi $dx > 0$. Så er den *afledte* brøken $\frac{du}{dx}$.

Sætning 1

Hvis u og v er differentiable, er uv differentiabel, og

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Bevis.

$$\begin{aligned} d(uv) &= (u + du)(v + dv) - uv \\ &= u\,dv + v\,du + \cancel{du\,dv} \end{aligned}$$

Differentiation

Antag, at $u(x)$ ændrer sig du, når x ændrer sig med den infinitesimale værdi $dx > 0$. Så er den *afledte* brøken $\frac{du}{dx}$.

Sætning 1

Hvis u og v er differentiable, er uv differentiabel, og

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Bevis.

$$\begin{aligned} d(uv) &= (u + du)(v + dv) - uv \\ &= u\,dv + v\,du + \cancel{du\,dv} \end{aligned}$$

dvs.

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

□

Integration

Integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ er den uendelige sum af de infinitesimale tal $f(x)\,dx$, hvor x løber fra a til b.

Integration

Integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ er den uendelige sum af de infinitesimale tal $f(x)\,dx$, hvor x løber fra a til b.

Sætning 2

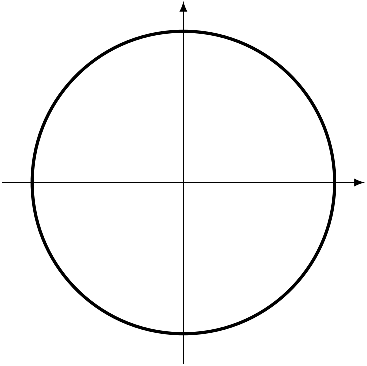
Arealet af en cirkelskive med radius r er πr^2.

Integration

Integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ er den uendelige sum af de infinitesimale tal $f(x)\,dx$, hvor x løber fra a til b.

Sætning 2

Arealet af en cirkelskive med radius r er πr^2.

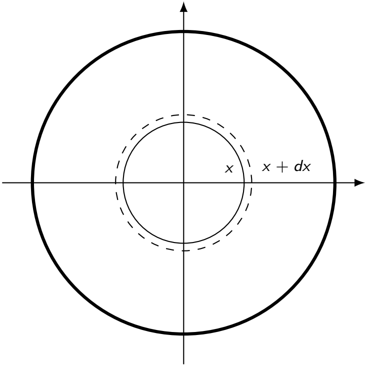


Integration

Integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ er den uendelige sum af de infinitesimale tal $f(x)\,dx$, hvor x løber fra a til b.

Sætning 2

Arealet af en cirkelskive med radius r er πr^2.

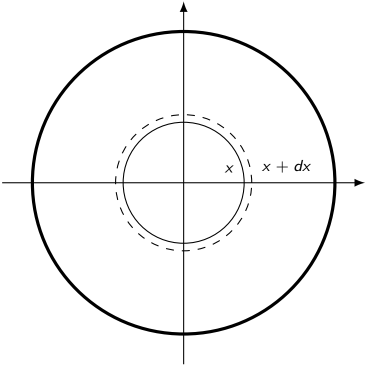


Integration

Integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ er den uendelige sum af de infinitesimale tal $f(x)\,dx$, hvor x løber fra a til b.

Sætning 2

Arealet af en cirkelskive med radius r er πr^2.



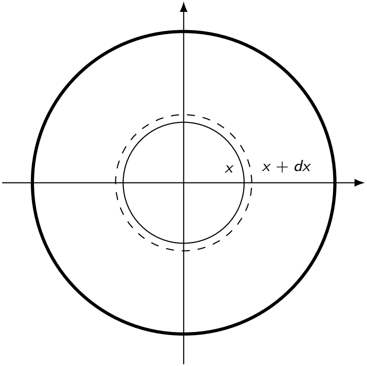
Arealet af striben fra x til $x + dx$ er $dA = 2\pi x\,dx$.

Integration

Integralet $\int_a^b f(x)\,dx$ er den uendelige sum af de infinitesimale tal $f(x)\,dx$, hvor x løber fra a til b.

Sætning 2

Arealet af en cirkelskive med radius r er πr^2.



Arealet af striben fra x til $x + dx$ er $dA = 2\pi x\,dx$. Hele arealet er

$$A = \int dA = 2\pi \int_0^r x\,dx = \pi r^2. \qquad \square$$

Ikke-standardanalyse

Grundlagt af Abraham Robinson i 1960'erne.

Ikke-standardanalyse

Grundlagt af Abraham Robinson i 1960'erne.

Udvider $\mathbb{R}$ til ${}^*\mathbb{R}$, de **hyperreelle tal**, et reelt lukket legeme som indeholder uendeligt store og små tal.

Ikke-standardanalyse

Grundlagt af Abraham Robinson i 1960'erne.

Udvider $\mathbb{R}$ til ${}^*\mathbb{R}$, de **hyperreelle tal**, et reelt lukket legeme som indeholder uendeligt store og små tal.

De kan kun konstrueres abstrakt via Zorns Lemma. Entydigheden af ${}^*\mathbb{R}$ er ækvivalent til Kontinuumshypotesen.

Vi skriver $x \approx y$, hvis $x - y$ er infinitesimal.

Vi skriver $x \approx y$, hvis $x - y$ er infinitesimal. For alle *endelige* $x \in {}^*\mathbb{R}$ findes en entydig **standarddel** $\mathrm{st}(x) \in \mathbb{R}$, så $x \approx \mathrm{st}(x)$.

Vi skriver $x \approx y$, hvis $x - y$ er infinitesimal. For alle *endelige* $x \in {}^*\mathbb{R}$ findes en entydig **standarddel** $\mathrm{st}(x) \in \mathbb{R}$, så $x \approx \mathrm{st}(x)$.

»The transfer principle«. Enhver mængde $X \subset \mathbb{R}^n$ har en **naturlig udvidelse** $^*X \subset ({}^*\mathbb{R})^n$ med $^*X \cap \mathbb{R}^n = X$.

Vi skriver $x \approx y$, hvis $x - y$ er infinitesimal. For alle *endelige* $x \in {}^*\mathbb{R}$ findes en entydig **standarddel** $\mathrm{st}(x) \in \mathbb{R}$, så $x \approx \mathrm{st}(x)$.

»**The transfer principle**«. Enhver mængde $X \subset \mathbb{R}^n$ har en **naturlig udvidelse** ${}^*X \subset ({}^*\mathbb{R})^n$ med ${}^*X \cap \mathbb{R}^n = X$.

Enhver funktion f på $X \subset \mathbb{R}^n$ har en naturlig udvidelse ${}^*f$ defineret på ${}^*X$. Den opfylder alle de førsteordensrelationer, som f opfylder.

Vi skriver $x \approx y$, hvis $x - y$ er infinitesimal. For alle *endelige* $x \in {}^*\mathbb{R}$ findes en entydig **standarddel** $\mathrm{st}(x) \in \mathbb{R}$, så $x \approx \mathrm{st}(x)$.

»The transfer principle«. Enhver mængde $X \subset \mathbb{R}^n$ har en **naturlig udvidelse** ${}^*X \subset ({}^*\mathbb{R})^n$ med ${}^*X \cap \mathbb{R}^n = X$.

Enhver funktion f på $X \subset \mathbb{R}^n$ har en naturlig udvidelse ${}^*f$ defineret på ${}^*X$. Den opfylder alle de førsteordensrelationer, som f opfylder.

Alle relationer og udsagn fra $\mathbb{R}$ har også en naturlig udvidelse til ${}^*\mathbb{R}$.

Ikke-standard-calculus

En funktion $u(x)$ er *differentiabel* i $x_0 \in \mathbb{R}$, hvis

$$u'(x_0) = \mathrm{st}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right)$$

findes for alle infinitesimaler $\Delta x \neq 0$ og er uafhængig af Δx.

Ikke-standard-calculus

En funktion $u(x)$ er *differentiabel* i $x_0 \in \mathbb{R}$, hvis

$$u'(x_0) = \mathrm{st}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right)$$

findes for alle infinitesimaler $\Delta x \neq 0$ og er uafhængig af Δx. Sæt da $dx = \Delta x$ og $du = u'\,dx$. Nu er $\frac{du}{dx} = u'$ atter en brøk.

Ikke-standard-calculus

En funktion $u(x)$ er *differentiabel* i $x_0 \in \mathbb{R}$, hvis

$$u'(x_0) = \mathrm{st}\left(\tfrac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \mathrm{st}\left(\tfrac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right)$$

findes for alle infinitesimaler $\Delta x \neq 0$ og er uafhængig af Δx. Sæt da $dx = \Delta x$ og $du = u'\,dx$. Nu er $\frac{du}{dx} = u'$ atter en brøk.

Funktionen $u(x)$ er *kontinuert* i $x_0 \in \mathbb{R}$, hvis $u(x) \approx u(x_0)$, når $x \approx x_0$.

Ikke-standard-calculus

En funktion $u(x)$ er *differentiabel* i $x_0 \in \mathbb{R}$, hvis

$$u'(x_0) = \operatorname{st}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right)$$

findes for alle infinitesimaler $\Delta x \neq 0$ og er uafhængig af Δx. Sæt da $dx = \Delta x$ og $du = u'\,dx$. Nu er $\frac{du}{dx} = u'$ atter en brøk.

Funktionen $u(x)$ er *kontinuert* i $x_0 \in \mathbb{R}$, hvis $u(x) \approx u(x_0)$, når $x \approx x_0$.

Bevis for $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$.

Ikke-standard-calculus

En funktion $u(x)$ er *differentiabel* i $x_0 \in \mathbb{R}$, hvis

$$u'(x_0) = \mathrm{st}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right)$$

findes for alle infinitesimaler $\Delta x \neq 0$ og er uafhængig af Δx. Sæt da $dx = \Delta x$ og $du = u'\,dx$. Nu er $\frac{du}{dx} = u'$ atter en brøk.

Funktionen $u(x)$ er *kontinuert* i $x_0 \in \mathbb{R}$, hvis $u(x) \approx u(x_0)$, når $x \approx x_0$.

Bevis for $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$.

$$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$$

Ikke-standard-calculus

En funktion $u(x)$ er *differentiabel* i $x_0 \in \mathbb{R}$, hvis

$$u'(x_0) = \operatorname{st}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right)$$

findes for alle infinitesimaler $\Delta x \neq 0$ og er uafhængig af Δx. Sæt da $dx = \Delta x$ og $du = u'\,dx$. Nu er $\frac{du}{dx} = u'$ atter en brøk.

Funktionen $u(x)$ er *kontinuert* i $x_0 \in \mathbb{R}$, hvis $u(x) \approx u(x_0)$, når $x \approx x_0$.

Bevis for $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$.

$$\begin{aligned} \Delta(uv) &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv \\ &= u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v \end{aligned}$$

Ikke-standard-calculus

En funktion $u(x)$ er *differentiabel* i $x_0 \in \mathbb{R}$, hvis

$$u'(x_0) = \operatorname{st}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \operatorname{st}\left(\frac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}\right)$$

findes for alle infinitesimaler $\Delta x \neq 0$ og er uafhængig af Δx. Sæt da $dx = \Delta x$ og $du = u'\,dx$. Nu er $\frac{du}{dx} = u'$ atter en brøk.

Funktionen $u(x)$ er *kontinuert* i $x_0 \in \mathbb{R}$, hvis $u(x) \approx u(x_0)$, når $x \approx x_0$.

Bevis for $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$.

$$\begin{aligned} \Delta(uv) &= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv \\ &= u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v \end{aligned}$$

dvs. $$\frac{d(uv)}{dx} = \operatorname{st}\left(\frac{\Delta(uv)}{\Delta x}\right) = \operatorname{st}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

Ikke-standard-calculus

En funktion $u(x)$ er *differentiabel* i $x_0 \in \mathbb{R}$, hvis

$$u'(x_0) = \mathrm{st}\Big(\frac{\Delta u}{\Delta x}\Big) = \mathrm{st}\Big(\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\Big)$$

findes for alle infinitesimaler $\Delta x \neq 0$ og er uafhængig af Δx. Sæt da $dx = \Delta x$ og $du = u'\,dx$. Nu er $\frac{du}{dx} = u'$ atter en brøk.

Funktionen $u(x)$ er *kontinuert* i $x_0 \in \mathbb{R}$, hvis $u(x) \approx u(x_0)$, når $x \approx x_0$.

Bevis for $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$.

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv \\ &= u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v\end{aligned}$$

dvs. $\quad \frac{d(uv)}{dx} = \mathrm{st}\Big(\frac{\Delta(uv)}{\Delta x}\Big) = \mathrm{st}\Big(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \cancel{\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}}\Big) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad \square$

Integration

Givet $\Delta x \in \mathbb{R}, \Delta x > 0$ og $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sættes

$$\sum_a^b f(x)\,\Delta x = f(x_0)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x + f(x_n)(b - x_n),$$

hvor $x_0 = a$ og $x_i = x_{i-1} + \Delta x$.

Integration

Givet $\Delta x \in \mathbb{R}, \Delta x > 0$ og $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sættes

$$\sum_a^b f(x)\,\Delta x = f(x_0)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x + f(x_n)(b - x_n),$$

hvor $x_0 = a$ og $x_i = x_{i-1} + \Delta x$.

$\Delta x \mapsto \sum_a^b f(x)\,\Delta x$ har en naturlig udvidelse til ${}^*\mathbb{R}$.

Integration

Givet $\Delta x \in \mathbb{R}, \Delta x > 0$ og $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sættes

$$\sum_a^b f(x)\,\Delta x = f(x_0)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x + f(x_n)(b - x_n),$$

hvor $x_0 = a$ og $x_i = x_{i-1} + \Delta x$.

$\Delta x \mapsto \sum_a^b f(x)\,\Delta x$ har en naturlig udvidelse til ${}^*\mathbb{R}$. Sæt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{st}\Big(\sum_a^b f(x)\,dx\Big)$$

for $dx > 0$ infinitesmal.

Integration

Givet $\Delta x \in \mathbb{R}, \Delta x > 0$ og $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sættes

$$\sum_a^b f(x)\,\Delta x = f(x_0)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x + f(x_n)(b - x_n),$$

hvor $x_0 = a$ og $x_i = x_{i-1} + \Delta x$.

$\Delta x \mapsto \sum_a^b f(x)\,\Delta x$ har en naturlig udvidelse til ${}^*\mathbb{R}$. Sæt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{st}\Big(\sum_a^b f(x)\,dx\Big)$$

for $dx > 0$ infinitesmal. Vi kalder f *integrabel*, hvis $\int_a^b f(x)\,dx$ findes og er uafhængig af dx.

Sætning 3 (Analysens Fundamentalsætning)

Hvis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *er kontinuert, så er* $F(t) = \int_a^t f(x)\, dx$ *differentiabel for* $t \in (a, b)$, *og* $F' = f$.

Sætning 3 (Analysens Fundamentalsætning)

Hvis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert, så er $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ differentiabel for $t \in (a, b)$, og $F' = f$.

Bevis. Lad $c \in (a, b)$ og $u \in (0, b - c)$. Så findes $m, M \in [c, c + u]$, så $f(m) \leq f(t) \leq f(M)$ for $t \in [c, c + u]$.

Sætning 3 (Analysens Fundamentalsætning)

Hvis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert, så er $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ differentiabel for $t \in (a, b)$, og $F' = f$.

Bevis. Lad $c \in (a, b)$ og $u \in (0, b - c)$. Så findes $m, M \in [c, c + u]$, så $f(m) \le f(t) \le f(M)$ for $t \in [c, c + u]$. Ergo er

$$uf(m) = \int_c^{c+u} f(m)\,dx \le \int_c^{c+u} f(x)\,dx \le \int_c^{c+u} f(M)\,dx = uf(M).$$

Sætning 3 (Analysens Fundamentalsætning)

Hvis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert, så er $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ differentiabel for $t \in (a, b)$, og $F' = f$.

Bevis. Lad $c \in (a, b)$ og $u \in (0, b - c)$. Så findes $m, M \in [c, c + u]$, så $f(m) \leq f(t) \leq f(M)$ for $t \in [c, c + u]$. Ergo er

$$uf(m) = \int_c^{c+u} f(m)\,dx \leq \int_c^{c+u} f(x)\,dx \leq \int_c^{c+u} f(M)\,dx = uf(M).$$

Med andre ord: $\forall u \in (0, b - c) \quad \exists m, M \in [c, c + u]$:

$$uf(m) \leq F(c + u) - F(c) \leq uf(M).$$

Sætning 3 (Analysens Fundamentalsætning)

Hvis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert, så er $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ differentiabel for $t \in (a, b)$, og $F' = f$.

Bevis. Lad $c \in (a, b)$ og $u \in (0, b - c)$. Så findes $m, M \in [c, c + u]$, så $f(m) \leq f(t) \leq f(M)$ for $t \in [c, c + u]$. Ergo er

$$uf(m) = \int_c^{c+u} f(m)\,dx \leq \int_c^{c+u} f(x)\,dx \leq \int_c^{c+u} f(M)\,dx = uf(M).$$

Med andre ord: $\forall u \in {}^*(0, b - c) \quad \exists m, M \in {}^*[c, c + u]$:

$$uf(m) \leq F(c + u) - F(c) \leq uf(M).$$

Sætning 3 (Analysens Fundamentalsætning)

Hvis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert, så er $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ differentiabel for $t \in (a, b)$, og $F' = f$.

Bevis. Lad $c \in (a, b)$ og $u \in (0, b - c)$. Så findes $m, M \in [c, c + u]$, så $f(m) \le f(t) \le f(M)$ for $t \in [c, c + u]$. Ergo er

$$uf(m) = \int_c^{c+u} f(m)\,dx \le \int_c^{c+u} f(x)\,dx \le \int_c^{c+u} f(M)\,dx = uf(M).$$

Med andre ord: $\forall u \in {}^*(0, b - c) \quad \exists m, M \in {}^*[c, c + u]$:

$$uf(m) \le F(c + u) - F(c) \le uf(M).$$

$u \approx 0$: $$f(c) \approx f(m) \le \frac{F(c + u) - F(c)}{u} \le f(M) \approx f(c).$$ $\square$

Hyperhele tal

Lad $[x]$ være heltalsdelen af $x \in \mathbb{R}$. Så har $[\,\cdot\,]$ en naturlig udvidelse til ${}^*\mathbb{R}$. Lad ${}^*\mathbb{Z}$ være mængden af de $x \in {}^*\mathbb{R}$, som opfylder $[x] = x$.

Hyperhele tal

Lad $[x]$ være heltalsdelen af $x \in \mathbb{R}$. Så har $[\,\cdot\,]$ en naturlig udvidelse til ${}^*\mathbb{R}$. Lad ${}^*\mathbb{Z}$ være mængden af de $x \in {}^*\mathbb{R}$, som opfylder $[x] = x$. Tilsvarende for $\mathbb{N}$.

Hyperhele tal

Lad $[x]$ være heltalsdelen af $x \in \mathbb{R}$. Så har $[\cdot]$ en naturlig udvidelse til $^*\mathbb{R}$. Lad $^*\mathbb{Z}$ være mængden af de $x \in {}^*\mathbb{R}$, som opfylder $[x] = x$. Tilsvarende for $\mathbb{N}$.

Da opfylder $^*\mathbb{N}$ Peanos aksiomer; indefra kan man ikke se forskel på $\mathbb{N}$ og $^*\mathbb{N}$.

Hyperhele tal

Lad $[x]$ være heltalsdelen af $x \in \mathbb{R}$. Så har $[\,\cdot\,]$ en naturlig udvidelse til ${}^*\mathbb{R}$. Lad ${}^*\mathbb{Z}$ være mængden af de $x \in {}^*\mathbb{R}$, som opfylder $[x] = x$. Tilsvarende for $\mathbb{N}$.

Da opfylder ${}^*\mathbb{N}$ Peanos aksiomer; indefra kan man ikke se forskel på $\mathbb{N}$ og ${}^*\mathbb{N}$.

En talfølge $a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ har en naturlig udvidelse $a \colon {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$.

Hyperhele tal

Lad $[x]$ være heltalsdelen af $x \in \mathbb{R}$. Så har $[\,\cdot\,]$ en naturlig udvidelse til $^*\mathbb{R}$. Lad $^*\mathbb{Z}$ være mængden af de $x \in {}^*\mathbb{R}$, som opfylder $[x] = x$. Tilsvarende for $\mathbb{N}$.

Da opfylder $^*\mathbb{N}$ Peanos aksiomer; indefra kan man ikke se forskel på $\mathbb{N}$ og $^*\mathbb{N}$.

En talfølge $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ har en naturlig udvidelse $a\colon {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$. Følgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ er *konvergent* imod a, hvis $a_H \approx a$ for alle uendeligt store $H \in {}^*\mathbb{N}$.

Sætning 4 (Mellemværdisætningen)

Hvis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert og s er et punkt imellem $f(a)$ og $f(b)$, så findes et $c \in [a, b]$, så $f(c) = s$.

Sætning 4 (Mellemværdisætningen)

Hvis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert og s er et punkt imellem $f(a)$ og $f(b)$, så findes et $c \in [a, b]$, så $f(c) = s$.

Bevis. Antag $f(a) \leq s \leq f(b)$. For $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$ sættes $\delta = (b - a)/n$.

Sætning 4 (Mellemværdisætningen)

Hvis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert og s er et punkt imellem $f(a)$ og $f(b)$, så findes et $c \in [a, b]$, så $f(c) = s$.

Bevis. Antag $f(a) \leq s \leq f(b)$. For $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$ sættes $\delta = (b - a)/n$. Så findes et $m \in \mathbb{Z}, 0 \leq m < n$, så

$$f(a + m\delta) \leq s \leq f(a + (m + 1)\delta).$$

Sætning 4 (Mellemværdisætningen)

Hvis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert og s er et punkt imellem $f(a)$ og $f(b)$, så findes et $c \in [a, b]$, så $f(c) = s$.

Bevis. Antag $f(a) \leq s \leq f(b)$. For $n \in {}^*\mathbb{Z}, n \geq 1$ sættes $\delta = (b - a)/n$. Så findes et $m \in {}^*\mathbb{Z}, 0 \leq m < n$, så

$$f(a + m\delta) \leq s \leq f(a + (m + 1)\delta).$$

Sætning 4 (Mellemværdisætningen)

Hvis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert og s er et punkt imellem $f(a)$ og $f(b)$, så findes et $c \in [a, b]$, så $f(c) = s$.

Bevis. Antag $f(a) \leq s \leq f(b)$. For $n \in {}^*\mathbb{Z}, n \geq 1$ sættes $\delta = (b - a)/n$. Så findes et $m \in {}^*\mathbb{Z}, 0 \leq m < n$, så

$$f(a + m\delta) \leq s \leq f(a + (m + 1)\delta).$$

Vælg n uendelig, og sæt $c = \mathrm{st}(a + m\delta)$.

Sætning 4 (Mellemværdisætningen)

Hvis $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert og s er et punkt imellem $f(a)$ og $f(b)$, så findes et $c \in [a, b]$, så $f(c) = s$.

Bevis. Antag $f(a) \leq s \leq f(b)$. For $n \in {}^*\mathbb{Z}, n \geq 1$ sættes $\delta = (b-a)/n$. Så findes et $m \in {}^*\mathbb{Z}, 0 \leq m < n$, så

$$f(a + m\delta) \leq s \leq f(a + (m+1)\delta).$$

Vælg n uendelig, og sæt $c = \mathrm{st}(a + m\delta)$. Ved at tage standadrdelen får vi

$$f(c) \leq s \leq f(c),$$

da f er kontinuert. □

Et **filter** på $\mathbb{N}$ er en ikke-tom delmængde $F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, som opfylder

- Hvis $U \in F$ og $U \subset V$, så er $V \in F$.
- Hvis $U, V \in F$, er $U \cap V \in F$.
- $\varnothing \notin F$.

Et **filter** på $\mathbb{N}$ er en ikke-tom delmængde $F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, som opfylder

- Hvis $U \in F$ og $U \subset V$, så er $V \in F$.
- Hvis $U, V \in F$, er $U \cap V \in F$.
- $\varnothing \notin F$.

Vi kalder F et **ultrafilter**, hvis der endvidere gælder

- For alle $U \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ er enten U eller $\mathbb{N} \setminus U$ i F.

Et **filter** på $\mathbb{N}$ er en ikke-tom delmængde $F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, som opfylder

- Hvis $U \in F$ og $U \subset V$, så er $V \in F$.
- Hvis $U, V \in F$, er $U \cap V \in F$.
- $\varnothing \notin F$.

Vi kalder F et **ultrafilter**, hvis der endvidere gælder

- For alle $U \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ er enten U eller $\mathbb{N} \setminus U$ i F.

Det kaldes **frit**, hvis

- F indeholder ingen endelige mængder.

Et **filter** på $\mathbb{N}$ er en ikke-tom delmængde $F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, som opfylder

- Hvis $U \in F$ og $U \subset V$, så er $V \in F$.
- Hvis $U, V \in F$, er $U \cap V \in F$.
- $\varnothing \notin F$.

Vi kalder F et **ultrafilter**, hvis der endvidere gælder

- For alle $U \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ er enten U eller $\mathbb{N} \setminus U$ i F.

Det kaldes **frit**, hvis

- F indeholder ingen endelige mængder.

$$\Updownarrow$$

F indeholder ingen punktmængder.

Et **filter** på $\mathbb{N}$ er en ikke-tom delmængde $F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, som opfylder

- Hvis $U \in F$ og $U \subset V$, så er $V \in F$.
- Hvis $U, V \in F$, er $U \cap V \in F$.
- $\varnothing \notin F$.

Vi kalder F et **ultrafilter**, hvis der endvidere gælder

- For alle $U \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ er enten U eller $\mathbb{N} \setminus U$ i F.

Det kaldes **frit**, hvis

- F indeholder ingen endelige mængder.

$$\Updownarrow$$

F indeholder ingen punktmængder.

$$\Updownarrow$$

F har ikke formen $\{A \subset \mathbb{N} \mid a \in A\}$ for noget a.