Zermelo-Fraenkel-aksiomerne

Sebastian Ørsted

Institut for Matematik

29. maj 2015

Formelt er matematik blot »leg med symboler«.

Formelt er matematik blot »leg med symboler«.
I **førsteordenslogik** bruges et alfabet bestående af

$$\wedge \quad \vee \quad \Longrightarrow \quad \Longleftrightarrow \quad \neg \quad (\quad) \quad \forall \quad \exists \quad =$$

samt små bogstaver $x, y, z, \ldots$ for såkaldt *variable*.

Formelt er matematik blot »leg med symboler«.
I **førsteordenslogik** bruges et alfabet bestående af

$$\wedge \quad \vee \quad \implies \quad \iff \quad \neg \quad (\quad) \quad \forall \quad \exists \quad =$$

samt små bogstaver $x, y, z, \dots$ for såkaldt *variable*.
En **teori** er én eller anden samling af sætninger (f.eks. aksiomer).

Formelt er matematik blot »leg med symboler«.
I **førsteordenslogik** bruges et alfabet bestående af

$$\wedge \quad \vee \quad \implies \quad \iff \quad \neg \quad (\quad) \quad \forall \quad \exists \quad =$$

samt små bogstaver $x, y, z, \ldots$ for såkaldt *variable*.
En **teori** er én eller anden samling af sætninger (f.eks. aksiomer).
En **model** er noget, der opfylder sætningerne.

ZFC er en teori, som indeholder udsagn om den binære relation $\in$. De siger intet om, hvad $\in$ rent faktisk »betyder«.

ZFC er en teori, som indeholder udsagn om den binære relation $\in$.
De siger intet om, hvad $\in$ rent faktisk »betyder«.
Modeller for ZFC?

ZFC er en teori, som indeholder udsagn om den binære relation $\in$.
De siger intet om, hvad $\in$ rent faktisk »betyder«.
Modeller for ZFC?

$$M = \text{lektorer på AU}$$

$$\in \; = \text{er ansat på samme institut som}$$

ZFC er en teori, som indeholder udsagn om den binære relation $\in$.
De siger intet om, hvad $\in$ rent faktisk »betyder«.
Modeller for ZFC?

$$M = \text{lektorer på AU}$$
$$\in = \text{er ansat på samme institut som}$$
$$M = \text{romerske kejsere}$$
$$\in = \text{fulgte efter}$$

ZFC er en teori, som indeholder udsagn om den binære relation $\in$.
De siger intet om, hvad $\in$ rent faktisk »betyder«.
Modeller for ZFC?

$$\begin{aligned}
M &= \text{lektorer på AU} \\
\in &= \text{er ansat på samme institut som} \\
M &= \text{romerske kejsere} \\
\in &= \text{fulgte efter} \\
M &= \text{alle tasker i verden} \\
\in &= \text{ligger i.}
\end{aligned}$$

ZFC er en teori, som indeholder udsagn om den binære relation $\in$. De siger intet om, hvad $\in$ rent faktisk »betyder«.
Modeller for ZFC?

$$\begin{aligned} M &= \text{lektorer på AU} \\ \in &= \text{er ansat på samme institut som} \\ M &= \text{romerske kejsere} \\ \in &= \text{fulgte efter} \\ M &= \text{alle tasker i verden} \\ \in &= \text{ligger i.} \end{aligned}$$

Der er faktisk ingen oplagte modeller for ZFC i den »virkelige« verden; de lever kun i vores fantasi.

ZFC er en teori, som indeholder udsagn om den binære relation $\in$.
De siger intet om, hvad $\in$ rent faktisk »betyder«.
Modeller for ZFC?

$$
\begin{aligned}
M &= \text{lektorer på AU} \\
\in &= \text{er ansat på samme institut som} \\
M &= \text{romerske kejsere} \\
\in &= \text{fulgte efter} \\
M &= \text{alle tasker i verden} \\
\in &= \text{ligger i.}
\end{aligned}
$$

Der er faktisk ingen oplagte modeller for ZFC i den »virkelige« verden; de lever kun i vores fantasi.

$$
\begin{aligned}
M &= \text{de fantasiobjekter, vi normalt kalder »mængder«} \\
\in &= \text{er element i.}
\end{aligned}
$$

Hvad er formålet med aksiomerne?

Hvad er formålet med aksiomerne?

- At vedtage, hvad der er sandt eller falskt?

Hvad er formålet med aksiomerne?

- At vedtage, hvad der er sandt eller falskt? Nej, hvad så med beviser? Sandt er sandt uanset aksiomerne.

Hvad er formålet med aksiomerne?

- At vedtage, hvad der er sandt eller falskt? Nej, hvad så med beviser? Sandt er sandt uanset aksiomerne.
- At give en formel definition af tal, mængder etc.?

Hvad er formålet med aksiomerne?

- At vedtage, hvad der er sandt eller falskt? Nej, hvad så med beviser? Sandt er sandt uanset aksiomerne.
- At give en formel definition af tal, mængder etc.? Nej, de er en del af vores *sprog*.

Hvad er formålet med aksiomerne?

- At vedtage, hvad der er sandt eller falskt? Nej, hvad så med beviser? Sandt er sandt uanset aksiomerne.
- At give en formel definition af tal, mængder etc.? Nej, de er en del af vores *sprog*.
- At give matematikken et sikkert grundlag uden modstrid?

Hvad er formålet med aksiomerne?

- At vedtage, hvad der er sandt eller falskt? Nej, hvad så med beviser? Sandt er sandt uanset aksiomerne.
- At give en formel definition af tal, mængder etc.? Nej, de er en del af vores *sprog*.
- At give matematikken et sikkert grundlag uden modstrid? Ja!

Hvad er formålet med aksiomerne?

- At vedtage, hvad der er sandt eller falskt? Nej, hvad så med beviser? Sandt er sandt uanset aksiomerne.
- At give en formel definition af tal, mængder etc.? Nej, de er en del af vores *sprog*.
- At give matematikken et sikkert grundlag uden modstrid? Ja!
- At få styr på og overblik over matematikken ved at anvende så få startantagelser (=aksiomer) som muligt?

Hvad er formålet med aksiomerne?

- At vedtage, hvad der er sandt eller falskt? Nej, hvad så med beviser? Sandt er sandt uanset aksiomerne.
- At give en formel definition af tal, mængder etc.? Nej, de er en del af vores *sprog*.
- At give matematikken et sikkert grundlag uden modstrid? Ja!
- At få styr på og overblik over matematikken ved at anvende så få startantagelser (=aksiomer) som muligt? Ja!

Hvad er formålet med aksiomerne?

- At vedtage, hvad der er sandt eller falskt? Nej, hvad så med beviser? Sandt er sandt uanset aksiomerne.
- At give en formel definition af tal, mængder etc.? Nej, de er en del af vores *sprog*.
- At give matematikken et sikkert grundlag uden modstrid? Ja!
- At få styr på og overblik over matematikken ved at anvende så få startantagelser (=aksiomer) som muligt? Ja!
- At få en bevisteori for matematik?

Hvad er formålet med aksiomerne?

- At vedtage, hvad der er sandt eller falskt? Nej, hvad så med beviser? Sandt er sandt uanset aksiomerne.
- At give en formel definition af tal, mængder etc.? Nej, de er en del af vores *sprog*.
- At give matematikken et sikkert grundlag uden modstrid? Ja!
- At få styr på og overblik over matematikken ved at anvende så få startantagelser (=aksiomer) som muligt? Ja!
- At få en bevisteori for matematik? Ja!

Aksiom I (Ekstensionalitetsaksiomet)

Hvis to mængder x og y indeholder de samme elementer, så er $x = y$.

Aksiom I (Ekstensionalitetsaksiomet)

Hvis to mængder x og y indeholder de samme elementer, så er $x = y$.

$$\forall x, y \quad (\forall z \quad z \in x \iff z \in y) \implies x = y$$

Aksiom I (Ekstensionalitetsaksiomet)

Hvis to mængder x og y indeholder de samme elementer, så er $x = y$.

$$\forall x, y \quad (\forall z \quad z \in x \iff z \in y) \implies x = y$$

Aksiom II (Aksiomet for den tomme mængde)

Der findes en mængde $\varnothing$, så $z \notin \varnothing$ for alle z.

Aksiom I (Ekstensionalitetsaksiomet)

Hvis to mængder x og y indeholder de samme elementer, så er $x = y$.

$$\forall x, y \quad (\forall z \quad z \in x \iff z \in y) \implies x = y$$

Aksiom II (Aksiomet for den tomme mængde)

Der findes en mængde $\varnothing$, så $z \notin \varnothing$ for alle z.

$$\exists \varnothing \quad \forall z \quad z \notin \varnothing.$$

Aksiom I (Ekstensionalitetsaksiomet)

Hvis to mængder x og y indeholder de samme elementer, så er $x = y$.

$$\forall x, y \quad (\forall z \quad z \in x \iff z \in y) \implies x = y$$

Aksiom II (Aksiomet for den tomme mængde)

Der findes en mængde $\varnothing$, så $z \notin \varnothing$ for alle z.

$$\exists \varnothing \quad \forall z \quad z \notin \varnothing.$$

Aksiom III (Parringsaksiomet)

For alle mængder x, y findes en mængde $z = \{x, y\}$, som indeholder præcist x og y.

Aksiom I (Ekstensionalitetsaksiomet)

Hvis to mængder x og y indeholder de samme elementer, så er $x = y$.

$$\forall x, y \quad (\forall z \quad z \in x \iff z \in y) \implies x = y$$

Aksiom II (Aksiomet for den tomme mængde)

Der findes en mængde $\varnothing$, så $z \notin \varnothing$ for alle z.

$$\exists \varnothing \quad \forall z \quad z \notin \varnothing.$$

Aksiom III (Parringsaksiomet)

For alle mængder x, y findes en mængde $z = \{x, y\}$, som indeholder præcist x og y.

$$\forall x, y \quad \exists z \quad \forall w \quad w \in z \iff w = x \vee w = y.$$

Aksiom IV (Foreningsaksiomet)

Hvis x er en mængde, så findes en mængde $y = \bigcup x$, som præcist indeholder alle elementer tilhørende elementerne i x.

Aksiom IV (Foreningsaksiomet)

Hvis x er en mængde, så findes en mængde $y = \bigcup x$, som præcist indeholder alle elementer tilhørende elementerne i x.

$$\forall x \quad \exists y \quad \forall z \quad z \in y \iff \left(\exists w \quad z \in w \wedge w \in x\right).$$

Aksiom IV (Foreningsaksiomet)

Hvis x er en mængde, så findes en mængde $y = \bigcup x$, som præcist indeholder alle elementer tilhørende elementerne i x.

$$\forall x \quad \exists y \quad \forall z \quad z \in y \iff \left(\exists w \quad z \in w \wedge w \in x\right).$$

Aksiom V (Uendelighedsaksiomet)

Der findes en mængde ω, som indeholder $\varnothing$, og hvor $y \in \omega$ medfører $y \cup \{y\} \in \omega$.

Aksiom IV (Foreningsaksiomet)

Hvis x er en mængde, så findes en mængde $y = \bigcup x$, som præcist indeholder alle elementer tilhørende elementerne i x.

$$\forall x \quad \exists y \quad \forall z \quad z \in y \iff \left(\exists w \quad z \in w \wedge w \in x\right).$$

Aksiom V (Uendelighedsaksiomet)

Der findes en mængde ω, som indeholder $\varnothing$, og hvor $y \in \omega$ medfører $y \cup \{y\} \in \omega$.

$$\exists \omega \quad \varnothing \in \omega \wedge \left(\forall y \quad y \in \omega \implies y \cup \{y\} \in \omega\right).$$

Aksiom IV (Foreningsaksiomet)

Hvis x er en mængde, så findes en mængde $y = \bigcup x$, som præcist indeholder alle elementer tilhørende elementerne i x.

$$\forall x \quad \exists y \quad \forall z \quad z \in y \iff (\exists w \quad z \in w \wedge w \in x).$$

Aksiom V (Uendelighedsaksiomet)

Der findes en mængde ω, som indeholder $\varnothing$, og hvor $y \in \omega$ medfører $y \cup \{y\} \in \omega$.

$$\exists \omega \quad \varnothing \in \omega \wedge (\forall y \quad y \in \omega \implies y \cup \{y\} \in \omega).$$

Så $\omega = \{\varnothing, \quad \{\varnothing\}, \quad \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \quad \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots\}$

(i hvert fald næsten)

Aksiom IV (Foreningsaksiomet)

Hvis x er en mængde, så findes en mængde $y = \bigcup x$, som præcist indeholder alle elementer tilhørende elementerne i x.

$$\forall x \quad \exists y \quad \forall z \quad z \in y \iff (\exists w \quad z \in w \wedge w \in x).$$

Aksiom V (Uendelighedsaksiomet)

Der findes en mængde ω, som indeholder $\varnothing$, og hvor $y \in \omega$ medfører $y \cup \{y\} \in \omega$.

$$\exists \omega \quad \varnothing \in \omega \wedge (\forall y \quad y \in \omega \implies y \cup \{y\} \in \omega).$$

Så $\omega = \{\varnothing, \quad \{\varnothing\}, \quad \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \quad \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots\}$

(i hvert fald næsten)

$$\mathbb{N} = \{0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots\}$$

Aksiom IV (Foreningsaksiomet)

Hvis x er en mængde, så findes en mængde $y = \bigcup x$, som præcist indeholder alle elementer tilhørende elementerne i x.

$$\forall x \quad \exists y \quad \forall z \quad z \in y \iff \big(\exists w \quad z \in w \wedge w \in x\big).$$

Aksiom V (Uendelighedsaksiomet)

Der findes en mængde ω, som indeholder $\varnothing$, og hvor $y \in \omega$ medfører $y \cup \{y\} \in \omega$.

$$\exists \omega \quad \varnothing \in \omega \wedge \big(\forall y \quad y \in \omega \implies y \cup \{y\} \in \omega\big).$$

Så $\omega = \{\varnothing, \quad \{\varnothing\}, \quad \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \quad \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots\}$

(i hvert fald næsten)

$$\mathbb{N} = \{0, \qquad 1, \qquad 2, \qquad 3, \qquad \ldots\}$$

Mao. $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, og $n + 1 = n \cup \{n\}$.

Aksiom VI (Potensmængdeaksiomet)

For alle mængder x findes en mængde $\mathcal{P}(x)$, som præcist indeholder alle delmængder af x.

Aksiom VI (Potensmængdeaksiomet)

For alle mængder x findes en mængde $\mathcal{P}(x)$, som præcist indeholder alle delmængder af x.

$$\forall x \quad \exists \mathcal{P}(x) \quad \forall z \quad z \in \mathcal{P}(x) \iff z \subseteq x.$$

Aksiom VI (Potensmængdeaksiomet)

For alle mængder x findes en mængde $\mathcal{P}(x)$, som præcist indeholder alle delmængder af x.

$$\forall x \quad \exists \mathcal{P}(x) \quad \forall z \quad z \in \mathcal{P}(x) \iff z \subseteq x.$$

Her er $z \subseteq x$ en forkortelse for $\forall w \quad w \in z \implies w \in x$.

Aksiom VI (Potensmængdeaksiomet)

For alle mængder x findes en mængde $\mathcal{P}(x)$, som præcist indeholder alle delmængder af x.

$$\forall x \quad \exists \mathcal{P}(x) \quad \forall z \quad z \in \mathcal{P}(x) \iff z \subseteq x.$$

Her er $z \subseteq x$ en forkortelse for $\forall w \quad w \in z \implies w \in x$.

Aksiom VII (Regularitetsaksiomet)

Lad x være ikke-tom. Så findes et $y \in x$, så x og y er disjunkte.

Aksiom VI (Potensmængdeaksiomet)

For alle mængder x findes en mængde $\mathcal{P}(x)$, som præcist indeholder alle delmængder af x.

$$\forall x \quad \exists \mathcal{P}(x) \quad \forall z \quad z \in \mathcal{P}(x) \iff z \subseteq x.$$

Her er $z \subseteq x$ en forkortelse for $\forall w \quad w \in z \implies w \in x$.

Aksiom VII (Regularitetsaksiomet)

Lad x være ikke-tom. Så findes et $y \in x$, så x og y er disjunkte.

$$\forall x \quad x \neq \varnothing \implies \exists y \quad \left[y \in x \wedge \forall z \quad (z \in x \implies z \notin y)\right]$$

En *udvalgsfunktion* på en mængde S bestående af ikke-tomme mængder er en funktion $f\colon S \to \bigcup S$, så $f(y) \in y$ for alle $y \in S$.

En *udvalgsfunktion* på en mængde S bestående af ikke-tomme mængder er en funktion $f: S \to \bigcup S$, så $f(y) \in y$ for alle $y \in S$.

Aksiom VIII (Udvalgsaksiomet)

Enhver mængde S bestående af ikke-tomme mængder har en udvalgsfunktion $f: S \to \bigcup S$.

En *udvalgsfunktion* på en mængde S bestående af ikke-tomme mængder er en funktion $f\colon S \to \bigcup S$, så $f(y) \in y$ for alle $y \in S$.

Aksiom VIII (Udvalgsaksiomet)

Enhver mængde S bestående af ikke-tomme mængder har en udvalgsfunktion $f\colon S \to \bigcup S$.

$$\forall S\Big(\varnothing \notin S \implies \exists f\big[f\colon S \to \bigcup S \quad\wedge\quad \forall t(t \in S \implies f(t) \in t)\big]\Big).$$

En *udvalgsfunktion* på en mængde S bestående af ikke-tomme mængder er en funktion $f : S \to \bigcup S$, så $f(y) \in y$ for alle $y \in S$.

Aksiom VIII (Udvalgsaksiomet)

Enhver mængde S bestående af ikke-tomme mængder har en udvalgsfunktion $f : S \to \bigcup S$.

$$\forall S \Big(\varnothing \notin S \implies \exists f \big[f : S \to \bigcup S \quad \wedge \quad \forall t (t \in S \implies f(t) \in t) \big] \Big).$$

Som sædvanligt er $f : X \to Y$ en forkortelse for

$$f \subseteq X \times Y \quad \wedge \quad \forall x \left(x \in X \implies \exists! y \quad y \in Y \wedge (x, y) \in f \right)$$

En *udvalgsfunktion* på en mængde S bestående af ikke-tomme mængder er en funktion $f : S \to \bigcup S$, så $f(y) \in y$ for alle $y \in S$.

Aksiom VIII (Udvalgsaksiomet)

Enhver mængde S bestående af ikke-tomme mængder har en udvalgsfunktion $f : S \to \bigcup S$.

$$\forall S \Big(\varnothing \notin S \implies \exists f \big[f : S \to \bigcup S \quad \wedge \quad \forall t (t \in S \implies f(t) \in t) \big] \Big).$$

Som sædvanligt er $f : X \to Y$ en forkortelse for

$$f \subseteq X \times Y \quad \wedge \quad \forall x \, \big(x \in X \implies \exists ! y \quad y \in Y \wedge (x, y) \in f \big)$$

$\exists ! y \quad P(y)$ betyder

$$\exists y \quad (P(y) \quad \wedge \quad [\forall x \quad P(x) \implies x = y])$$

En *udvalgsfunktion* på en mængde S bestående af ikke-tomme mængder er en funktion $f\colon S \to \bigcup S$, så $f(y) \in y$ for alle $y \in S$.

Aksiom VIII (Udvalgsaksiomet)

Enhver mængde S bestående af ikke-tomme mængder har en udvalgsfunktion $f\colon S \to \bigcup S$.

$$\forall S\Big(\varnothing \notin S \implies \exists f\big[f\colon S \to \bigcup S \quad\wedge\quad \forall t(t \in S \implies f(t) \in t)\big]\Big).$$

Som sædvanligt er $f\colon X \to Y$ en forkortelse for

$$f \subseteq X \times Y \quad \wedge \quad \forall x\,\big(x \in X \implies \exists! y \quad y \in Y \wedge (x,y) \in f\big)$$

$\exists! y \quad P(y)$ betyder

$$\exists y \quad (P(y) \quad\wedge\quad [\forall x \quad P(x) \implies x = y])$$

$f(x) = y$ betyder $(x,y) \in f$

En *udvalgsfunktion* på en mængde S bestående af ikke-tomme mængder er en funktion $f: S \to \bigcup S$, så $f(y) \in y$ for alle $y \in S$.

Aksiom VIII (Udvalgsaksiomet)

Enhver mængde S bestående af ikke-tomme mængder har en udvalgsfunktion $f: S \to \bigcup S$.

$$\forall S\Big(\varnothing \notin S \implies \exists f\big[f: S \to \bigcup S \quad \wedge \quad \forall t(t \in S \implies f(t) \in t)\big]\Big).$$

Som sædvanligt er $f: X \to Y$ en forkortelse for

$$f \subseteq X \times Y \quad \wedge \quad \forall x\ \big(x \in X \implies \exists! y \quad y \in Y \wedge (x, y) \in f\big)$$

$\exists! y \quad P(y)$ betyder

$$\exists y \quad (P(y) \quad \wedge \quad [\forall x \quad P(x) \implies x = y])$$

$f(x) = y$ betyder $(x, y) \in f$, og $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Aksiom IX (Udskiftningsaksiomet)

Hvis U en en mængde, og f er en funktion, så er billedet

$$V = f[U] = \{f(u) \mid u \in U\}$$

af U under f en mængde.

Aksiom IX (Udskiftningsaksiomet)

Hvis U en en mængde, og f er en funktion, så er billedet

$$V = f[U] = \{f(u) \mid u \in U\}$$

af U under f en mængde.

Korollar 1 (Specifikationsaksiomet)

Hvis X er en mængde, og $P(x)$ et udsagn, så er $\{x \in X \mid P(x)\}$ en mængde.

Aksiom IX (Udskiftningsaksiomet)

Hvis U en en mængde, og f er en funktion, så er billedet

$$V = f[U] = \{f(u) \mid u \in U\}$$

af U under f en mængde.

Korollar 1 (Specifikationsaksiomet)

Hvis X er en mængde, og $P(x)$ et udsagn, så er $\{x \in X \mid P(x)\}$ en mængde.

Bevis. Antag, at $\forall x \ (x \in X \implies \neg P(x))$. Så virker $\varnothing$.

Aksiom IX (Udskiftningsaksiomet)

Hvis U en en mængde, og f er en funktion, så er billedet

$$V = f[U] = \{f(u) \mid u \in U\}$$

af U under f en mængde.

Korollar 1 (Specifikationsaksiomet)

Hvis X er en mængde, og $P(x)$ et udsagn, så er $\{x \in X \mid P(x)\}$ en mængde.

Bevis. Antag, at $\forall x \ (x \in X \implies \neg P(x))$. Så virker $\varnothing$.

Antag, at $x_0 \in X$ opfylder $P(x_0)$. Sæt $f(x) = \begin{cases} x & \text{hvis } P(x) \\ x_0 & \text{ellers} \end{cases}$

Aksiom IX (Udskiftningsaksiomet)

Hvis U en en mængde, og f er en funktion, så er billedet

$$V = f[U] = \{f(u) \mid u \in U\}$$

af U under f en mængde.

Korollar 1 (Specifikationsaksiomet)

Hvis X er en mængde, og $P(x)$ et udsagn, så er $\{x \in X \mid P(x)\}$ en mængde.

Bevis. Antag, at $\forall x \ (x \in X \implies \neg P(x))$. Så virker $\varnothing$.

Antag, at $x_0 \in X$ opfylder $P(x_0)$. Sæt $f(x) = \begin{cases} x & \text{hvis } P(x) \\ x_0 & \text{ellers} \end{cases}$

Så virker $f[X]$.

Aksiom IX (Udskiftningsaksiomet)

Hvis U en en mængde, og f er en funktion, så er billedet

$$V = f[U] = \{f(u) \mid u \in U\}$$

af U under f en mængde.

Et udsagn $P(x, y)$ giver anledning til en funktion $x \mapsto y$, hvis

$$\forall x \quad \exists! y \quad P(x, y)$$

Aksiom IX (Udskiftningsaksiomet)

Hvis U en en mængde, og f er en funktion, så er billedet

$$V = f[U] = \{f(u) \mid u \in U\}$$

af U under f en mængde.

$$\begin{aligned} &\forall x \quad \exists! y \quad P(x,y) \\ \Longrightarrow \quad &\forall U \quad \exists V \quad V = f[U] \end{aligned}$$

Aksiom IX (Udskiftningsaksiomet)

Hvis U en en mængde, og f er en funktion, så er billedet

$$V = f[U] = \{f(u) \mid u \in U\}$$

af U under f en mængde.

$$\begin{aligned} & \forall x \quad \exists! y \quad P(x,y) \\ \implies & \quad \forall U \quad \exists V \quad V = f[U] \end{aligned}$$

Her er »$V = f[U]$« doven notation for

$$\forall v \quad \Big(v \in V \iff \exists u \quad u \in U \wedge P(u,v)\Big)$$

Aksiom IX (Udskiftningsaksiomet)

Hvis U en en mængde, og f er en funktion, så er billedet

$$V = f[U] = \{f(u) \mid u \in U\}$$

af U under f en mængde.

$$\forall P \qquad \forall x \quad \exists! y \quad P(x, y)$$
$$\implies \quad \forall U \quad \exists V \quad V = f[U]$$

Her er »$V = f[U]$« doven notation for

$$\forall v \quad \Big(v \in V \iff \exists u \quad u \in U \land P(u, v)\Big)$$

Aksiom IX (Udskiftningsaksiomet)

Hvis U en en mængde, og f er en funktion, så er billedet

$$V = f[U] = \{f(u) \mid u \in U\}$$

af U under f en mængde.

$$\begin{aligned} \cancel{\forall P} \qquad & \forall x \quad \exists! y \quad P(x, y) \\ & \implies \forall U \quad \exists V \quad V = f[U] \end{aligned}$$

Here er »$V = f[U]$« doven notation for

$$\forall v \quad \big(v \in V \iff \exists u \quad u \in U \wedge P(u, v)\big)$$

Aksiom IX_n (Udskiftningsaksiomet for P_n)

Hvis U en en mængde, og f er en funktion, så er billedet

$$V = f[U] = \{f(u) \mid u \in U\}$$

af U under f en mængde.

$$\begin{aligned} &\forall x \quad \exists! y \quad P_n(x, y) \\ \implies &\quad \forall U \quad \exists V \quad V = f[U] \end{aligned}$$

Her er »$V = f[U]$« doven notation for

$$\forall v \quad \Big(v \in V \iff \exists u \quad u \in U \wedge P_n(u, v) \Big)$$

Aksiom IX_n (Udskiftningsaksiomet for P_n)

Hvis U en en mængde, og f er en funktion, så er billedet

$$V = f[U] = \{f(u) \mid u \in U\}$$

af U under f en mængde.

$$\forall x \quad \exists! y \quad P_n(x, y; t_1, \ldots, t_k)$$
$$\implies \quad \forall U \quad \exists V \quad V = f[U]$$

Her er »$V = f[U]$« doven notation for

$$\forall v \quad \Big(v \in V \iff \exists u \quad u \in U \wedge P_n(u, v; t_1, \ldots, t_k)\Big)$$

Aksiom IX$_n$ (Udskiftningsaksiomet for P_n)

Hvis U en en mængde, og f er en funktion, så er billedet

$$V = f[U] = \{f(u) \mid u \in U\}$$

af U under f en mængde.

$$\forall t_1, \ldots, t_k \qquad \forall x \quad \exists! y \quad P_n(x, y; t_1, \ldots, t_k)$$
$$\implies \quad \forall U \quad \exists V \quad V = f[U]$$

Her er »$V = f[U]$« doven notation for

$$\forall v \quad \Big(v \in V \iff \exists u \quad u \in U \wedge P_n(u, v; t_1, \ldots, t_k)\Big)$$